**АНО ВО «Российский новый университет»**

**Тамбовский филиал**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**392001, г. Тамбов, ул.Пензенская/К.Маркса, д.61/175, к.3, тел. (4752)44-46-09, 77-10-65, факс (4752)44-46-09**

**АСТАХОВ В.К.**

Конспект лекций по учебной дисциплине

**«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ**

**В ЭКОНОМИКЕ»**

для студентов очной и заочной форм обучения

по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика»

Тамбов

2017 г.

**АНО ВО «РОССИЙСКИЙ НОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Тамбовский филиал**

Факультет экономики и прикладной информатики

Кафедра экономики

квалификация (степень) «бакалавр»

**СОДЕРЖАНИЕ**

Стр.

Введение …………………………………………….………………………………… 4

1. Лекция №1 ….…..…………………………………...……………………………... 6
2. Лекция №2 ….…..…………………………………...……………………………… 14
3. Лекция №3 ….…..…………………………………...……………………………….21
4. Лекция №4 ….…..…………………………………...……………………………….31
5. Лекция №5 ….…..…………………………………...……………………………….41
6. Лекция №6 ….…..…………………………………...……………………………….45
7. Лекция №7 ….…..…………………………………...……………………………….52
8. Лекция №8 ….…..…………………………………...……………………………….57
9. Лекция №9 ….…..…………………………………...……………………………….64
10. Список литературы по дисциплине ………………………………………............80

**ВВЕДЕНИЕ**

**Лекции** относятся к видам занятий, на которых основное внимание отводится изучению теоретических вопросов дисциплины.

Лекции вводят обучаемых в область научных теории вычислительных методов, знакомят их с основными методами и способами, лежащими в основе решения практических задач, показывают ее взаимосвязь с другими отраслями знаний (учебными дисциплинами) и практическим применением. Лекция раскрывает в диалектической взаимосвязи наиболее сложные вопросы, формирует научное мировоззрение, ставит проблемные вопросы, отражает современные достижения науки и техники по рассматриваемым вопросам и способствует развитию творческого мышления студентов. Закладывая основы научных знаний, она определяет направление и основное содержание других видов учебных занятий и поэтому занимает ведущее положение по отношению к ним.

Лекции проводятся в составе потоков групп. В данной дисциплине используются лекции как с использование традиционных образовательных технологий (информационная лекция в объяснительно-наглядной форме), так и с использованием информационно-коммуникационных образовательных технологий (лекция-визуализация с использованием средств мультимедиа визуализации). Более подробно перечень информационных технологий, используемых при проведении лекций и осуществлении образовательного процесса по дисциплине, представлен в разделе 11 учебной программы дисциплины.

Изложение учебного материала во время лекции сопровождается демонстрацией тематических слайдов и других учебно-наглядных материалов.

Тема и учебные вопросы лекции определяются календарно-тематическим планом, разработанным в соответствии с учебной программой по дисциплине.

Студенты, прослушав курс лекций по определенной теме, получают возможность для углубленной работы над материалом на других видах занятий под руководством преподавателя и самостоятельно.

В конце каждой лекции лектор дает студентам задание на самостоятельную подготовку: изучить лекционный материал данной лекции, повторить (при необходимости) материалы других лекций, а также основную и дополнительную литературу с указанием конкретных страниц по материалу лекции.

Если по расписанию занятий после лекции следует практическое занятие, то лектор напоминает об этом студентам и дает (помимо задания на изучение лекционного материала) задание на подготовку к этому занятию. При этом указываются темы и вопросы, которые надо изучить или повторить для эффективной работы на практическом занятии, перечень литературы и программных сред, необходимых для успешной работы на практическом занятии.

**Рекомендации по организации самостоятельной работы**

Изучение данной дисциплины предполагает обязательную самостоятельную работу студентов. Организации самостоятельной работы студентов следует уделить особое внимание, она должна быть системной и целенаправленной. Необходимость самостоятельной работы вызвана тем, что аудиторное время ограничено, и его целесообразно посвятить тем видам работы, в которых обязательно участие преподавателя.

Для самостоятельной работы студентам необходимо иметь основную и дополнительную литературу, конспект лекций, ПЭВМ с операционной системой Windows XP\7, пакет MS Excel,

Самостоятельная работа по данной дисциплине может быть либо внеаудиторной (дома, в библиотеке, в компьютерном классе), либо на занятиях при проведении практических занятий (в том числе и в компьютерном классе). В этом случае студент самостоятельно выполняет задания, полученные от преподавателя, а затем преподаватель оценивает их по четырех балльной системе.

Самостоятельная работа студентов по дисциплине «Вычислительные методы в экономике» организуется для изучения лекционного материала и для подготовки к практическим занятиям. Кроме того, заранее до экзамена студентам выдаются объемные требования, в которых подробно приводятся все вопросы по разделам и темам дисциплинам. Данные вопросы размещаются на сайте филиала.

В конце каждой лекции лектор дает студентам задание на самостоятельную подготовку: изучить лекционный материал данной лекции, повторить (при необходимости) материалы других лекций, а также основную и дополнительную литературу с указанием конкретных страниц по материалу лекции.

Если по расписанию занятий после лекции следует практическое занятие, то лектор напоминает об этом студентам и дает (помимо задания на изучение лекционного материала) задание на подготовку к этому занятию. При этом указываются темы и вопросы, которые надо изучить или повторить для эффективной работы на практическом занятии, перечень литературы и программных сред, необходимых для успешной работы на практическом занятии.

Практические занятия проводятся либо в компьютерном кабинете, оборудованном персональными компьютерами с необходимым программным обеспечением (подробнее см. раздел 12 данной рабочей программы), либо в любой аудитории, оснащенной классной доской. Во время проведения практических занятий преподаватель консультирует студентов по наиболее сложным вопросам и уточняет объем и степень выполнения индивидуальных и групповых заданий.

Использование новых технических средств обучения и массовой информации, в том числе, Интернета, позволяет добиться большей эффективности и индивидуализирует обучение с учетом интересов, уровня подготовки, способностей и особенностей восприятия учебного материала. Современная техника значительно расширяет возможности организации самостоятельной работы и разнообразит формы и методы обучения.

**Раздел 1. Погрешности и приближенное решение уравнений**

**Тема 1. Основы теории погрешностей**

Лекция №1

**Тема лекции: Классификация погрешностей измерений**

**Содержание лекции №1**

1. Абсолютная и относительная погрешности. Основные источники погрешностей.

2. Основные источники и классификация погрешностей численного решения задач на ЭВМ.

3. Источники и классификация погрешностей результата численного решения задачи.

4.Погрешности основных арифметических операций.

**Основная и дополнительная литература к лекции № 1**:

а) основная: 1,2,3;

б) дополнительная: 4 -8;

в) интернет-ресурсы: 2-4,10-13,14-16.

**1. Абсолютная и относительная погрешности. Основные источники погрешностей**

Представленная классификация погрешностей измерений связана с **причинами** их возникновения. Кроме этого существуют и другие признаки, по которым классифицируются погрешности.

По *характеру проявления* (свойствам погрешностей) они разделяются на **систематические** и **случайные**, *по способам выражения* - на **абсолютные** и **относительные**.

**Абсолютная погрешность** выражается в единицах измеряемой величины, а **относительная погрешность** представляет собой отношение абсолютной погрешности к измеренному (действительному) значению величины и ее численное значение выражается либо в процентах, либо в долях единицы.

Опыт проведения измерений показывает, что при многократных измерениях одной и той же неизменной физической величины при постоянных условиях погрешность измерений можно представить в виде двух слагаемых, которые по-разному проявляются от измерения к измерению. Существуют факторы, постоянно или закономерно изменяющиеся в процессе проведения измерений и влияющие на результат измерений и его погрешность. Погрешности, вызываемые такими факторами, называются **систематическими**.

**Систематическая погрешность** – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. В зависимости от характера изменения систематические погрешности подразделяются на **постоянные, прогрессирующие, периодические, изменяющиеся по сложному закону**.

Близость к нулю систематической погрешности отражает **правильность измерений**.

Систематические погрешности обычно оцениваются либо путем теоретического **анализа условий измерения**, основываясь на известных свойствах средств измерений, либо использованием **более точных средств измерений**. Как правило, систематические погрешности стараются исключить с помощью поправок. **Поправка** представляет собой значение величины, вводимое в неисправленный результат измерения с целью исключения систематической погрешности. Знак поправки противоположен знаку величины. На возникновение погрешностей влияют также и факторы, нерегулярно появляющиеся и неожиданно исчезающие. Причем интенсивность их тоже не остается постоянной. Результаты измерения в таких условиях имеют различия, которые индивидуально непредсказуемы, а присущие им закономерности проявляются лишь при значительном числе измерений. Погрешности, появляющиеся в результате действия таких факторов, называются **случайными погрешностями**.

**Случайная погрешность** – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях одной и той же величины, проведенных с одинаковой тщательностью.

Незначительность случайных погрешностей говорит о хорошей **сходимости измерений**, то есть о близости друг к другу результатов измерений, выполненных повторно одними и теми же средствами, одним и тем же методом, в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью.

Обнаруживаются случайные погрешности путем **повторных измерений** одной и той же величины в одних и тех же условиях. Они не могут быть исключены опытным путем, но могут быть оценены при обработке результатов наблюдений. Деление погрешностей измерений на случайные и систематические очень важно, т.к. учет и оценка этих составляющих погрешности требует разных подходов.

Факторы, вызывающие погрешности, как правило, можно свести к общему уровню, когда влияние их на формирование погрешности является более или менее одинаковым. Однако некоторые факторы могут проявляться неожиданно сильно, например, резкое падение напряжения в сети. В таком случае могут возникать погрешности, существенно превышающие погрешности, оправданные условиями измерений, свойствами средств измерений и метода измерений, квалификацией оператора. Такие погрешности называются **грубыми, или промахами**.

**Грубая погрешность (промах)** – погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных значений погрешности. Грубые погрешности необходимо всегда исключать из рассмотрения, если известно, что они являются результатом очевидных промахов при проведении измерений. Если же причины появления резко выделяющихся наблюдений установить нельзя, то для решения вопроса об их исключении используют статистические методы. Существует несколько критериев, которые позволяют выявить грубые погрешности. Некоторые из них рассмотрены ниже в разделе об обработке результатов измерений.

**Абсолютная и относительная погрешности**

Пусть имеется некоторая числовая величина, и числовое значение, которое ей присвоено \mathsf{(a)}, считается точным, тогда под *погрешностью приближенного значения числовой величины* (*ошибкой*) \mathsf{(\vartriangle a)}понимают разность между точным и приближенным значением числовой величины:

\mathsf{a^{*}-a=\vartriangle a}

Погрешность может принимать как положительное, так и отрицательное значение. Величина \mathsf{(a^{*})}называется *известным приближением* к точному значению числовой величины - любое число, которое используется вместо точного значения. Простейшей количественной мерой ошибки является абсолютная погрешность.

*Абсолютной погрешностью* приближенного значения \mathsf{(a^{*})}называют величину \mathsf{\vartriangle (a^{*})}, про которую известно, что:

\mathsf{\mid a^{*}-a \mid\le  \vartriangle(a^{*}).}

Качество приближения существенным образом зависит от принятых единиц измерения и масштабов величин, поэтому целесообразно соотнести погрешность величины и ее значение, для чего вводится понятие относительной погрешности.

*Относительной погрешностью* приближенного значения называют величину \mathsf{\delta (a^{*})}, про которую известно, что:

\mathsf{\left| {a^{*}-a \over a^{*}} \right|= {\vartriangle (a^{*}) \over \left| {a} \right|} = \delta (a^{*})}.

Относительную погрешность часто выражают в процентах. Использование относительных погрешностей удобно, в частности, тем, что они не зависят от масштабов величин и единиц измерения.

Так как точное значение обычно неизвестно, то непосредственное вычисление величин абсолютной и относительной погрешностей по предложенным формулам невозможно. Более реальная и часто поддающаяся решению задача состоит в получении оценок погрешности вида:

\mathsf{\left| {a - a^{*}} \right| \le \bar{\vartriangle} (a^{*})}

\mathsf{\left| {a - a^{*} \over a} \right| \le \bar{\delta} (a^{*})}(\*)

где \mathsf{\bar{\vartriangle} (a^{*})}и \mathsf{\bar{\delta} (a^{*})}— известные величины, которые называют *верхними границами (или просто границами) абсолютной и относительной погрешностей*.

Если величина \mathsf{\bar{\vartriangle} (a^{*})}известна, то неравенство (\*) будет выполнено, если положить

\mathsf{\bar{\delta} (a^{*}) = {{\bar{\vartriangle} (a^{*})}\over {\left| {a} \right|}}}

Точно так же если величина \mathsf{\bar{\delta} (a^{*})}известна, то следует положить:

\mathsf{\bar{\vartriangle} (a^{*}) = \left| {a} \right| {\bar{\delta} (a^{*})}}

Но поскольку точное значение \mathsf{a}неизвестно, на практике используют приближенные равенства вида:

\mathsf{\bar{\delta} (a^{*})  \approx {{\bar{\vartriangle} (a^{*})}\over {\left| {a^{*}} \right|}}}

\mathsf{\bar{\vartriangle} (a^{*}) \approx \left| {a^{*}} \right| {\bar{\delta} (a^{*})}}

В литературе по методам вычислений широко используется термин "точность". *Точное значение величины* — это значение, не содержащее погрешности. Повышение точности воспринимается как уменьшение погрешности. Часто используемая фраза "требуется найти решение с заданной точностью \mathsf{  \epsilon}" означает, что ставится задача о нахождении приближенного решения, принятая мера погрешности которого не превышает заданной величины \mathsf{  \epsilon}. Вообще говоря, следовало бы говорить об абсолютной точности и относительной точности, но часто этого не делают, считая, что из контекста ясно, как измеряется величина погрешности.

**2. Основные источники и классификация погрешностей численного решения задач на ЭВМ**

Одним из главных вопросов, возникающих при численном решении задач математической физики, является оценка достоверности полученного результата. Получение такой оценки усложняется, если в распоряжении исследователя нет экспериментальных или каких-либо иных результатов. Источник возникновения погрешностей можно проследить, следуя вышеприведенным этапам численного решения задачи. Во-первых, это погрешность, вносимая математической моделью задачи. Величина погрешности, вносимой в результат математической моделью, может возрасти, если в модели не учтены какие-либо важные характеристики изучаемого явления.

Кроме того, исходные данные вносят свою долю (иногда основную) в образование погрешности результата.

Эти источники погрешности называют *неустранимыми погрешностями*, так как их нельзя полностью устранить ни до начала решения задачи, ни, тем более, в процессе ее решения.

Не следует стремиться к уменьшению погрешности одних данных, оставляя другие без изменения. Это не приводит к повышению точности результата, поэтому на практике исходные данные задаются примерно с одинаковой точностью.

Еще одним источником погрешности является численный метод. Во многих численных методах, связанных, например, с приближенным вычислением интегралов или с нахождением промежуточных значений функции, заданной в виде таблицы, используется идея приближения функции с помощью алгебраического многочлена степени image010. Это приводит к образованию погрешности, связанной с такой заменой.

Заметим, что приближенное вычисление интеграла осуществляется также путем замены его конечной суммой, исходя из определения интеграла. Такая замена приводит к погрешности. Этот список примеров можно продолжить (см. [[4](http://www.math.tsu.ru/EEResources/cm/text/1_lit.htm), c. 19]). Заметим, что *погрешность численного метода* может быть уменьшена до разумных пределов за счет изменения некоторых параметров задачи, на пример шага интегрирования.

Этот тип погрешности более подробно анализируется для каждого численного метода в соответствующих разделах курса “Методы вычислений” [[1–5](http://www.math.tsu.ru/EEResources/cm/text/1_lit.htm)].

При вычислении на ПЭВМ неизбежно возникает *погрешность округления* в силу ограниченности разрядной сетки компьютера. Например, при округлении в компьютере максимальная относительная погрешность равна image011, где image012– основание системы счисления, image013– количество разрядов мантиссы числа. Если просто отбрасывать лишние разряды, то эта погрешность может возрасти в два раза.

Максимальная погрешность, вычисленная по вышеприведенной формуле, для чисел, представленных в формате с одинарной точностью (стандарт IEEE754), равна image014

Для чисел,представленных в формате с двойной точностью, image015(см. [[4](http://www.math.tsu.ru/EEResources/cm/text/1_lit.htm), c. 20]).

**3. Источники и классификация погрешностей результата численного решения задачи**

***Приближенным числом*** или ***приближением*** называется число, незначительно отличающееся от точного значения величины и заменяющее его в вычислениях. Под **погрешностью** же принято понимать разность между абсолютным значением и его приближением.

Для правильного понимания подходов и критериев, используемых при решении прикладной задачи с применением ЭВМ, важно понимать, что получить точное значение решения практически невозможно. Получаемое на ЭВМ решение почти всегда (за исключением некоторых весьма специальных случаев) содержит погрешность, т.е. является приближенным. Невозможность получения точного решения следует уже из ограниченной разрядности вычислительной машины.

Наличие погрешности обусловлено рядом весьма глубоких причин.

1. *Математическая модель является лишь приближенным описанием реального процесса*. Характеристики процесса, вычисленные в рамках принятой модели, заведомо отличаются от истинных характеристик, причем их погрешность зависит от степени адекватности модели реальному процессу.
2. *Исходные данные, как правило, содержат погрешности*, поскольку они либо получаются в результате экспериментов (измерений), либо являются результатом решения некоторых вспомогательных задач.
3. Применяемые для решения задачи *методы в большинстве случаев являются приближенными*. Найти решение возникающей на практике задачи в виде конечной формулы возможно только в отдельных, очень упрощенных ситуациях.
4. При вводе исходных данных в ЭВМ, выполнении арифметических операций и выводе результатов на печать *производятся округления*.

*Полная погрешность* \mathsf{(\delta y = y-y*)}результата решения задачи на ЭВМ складывается из трех составляющих: неустранимой погрешности, погрешности метода и вычислительной погрешности: \mathsf{(\delta y = \delta_{H} y + \delta_{M} y + \delta_{B} y)}.

Появление неустранимой погрешности обусловлено тем, что принятие математической модели и задание исходных данных вносит в решение ошибку, которая не может быть устранена далее. Единственный способ уменьшить эту погрешность — перейти к более точной математической модели и задать более точные исходные данные.

Достоверная информация о порядке величины погрешности метода позволяет осознанно выбрать метод решения задачи и разумно задать его точность. Желательно, чтобы величина погрешности метода была в 2—10 раз меньше неустранимой погрешности. Большее значение ощутимо снижает точность результата, меньшее — обычно требует увеличения затрат, практически уже не влияя на значение полной погрешности.

Величина вычислительной погрешности (при фиксированных модели, входных данных и методе решения) в основном определяется характеристиками используемой ЭВМ. Желательно, чтобы эта величина была хотя бы на порядок меньше величины погрешности метода и совсем не желательна ситуация, когда она существенно ее превышает.

**4.Погрешности основных арифметических операций**

*Правило 1:* Пусть \mathsf{a^{*}}и \mathsf{b^{*}}— приближенные значения чисел \mathsf{a} и \mathsf{b}, тогда абсолютная погрешность алгебраической суммы (суммы или разности) не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых, т.е.[1]:

\mathsf{\vartriangle (a^{*} \pm b^{*}) \le \vartriangle (a^{*}) + \vartriangle (b^{*})}

*Правило 2:* Пусть \mathsf{a} и \mathsf{b}— ненулевые числа одного знака, тогда:

1. \mathsf{\delta (a^{*} + b^{*}) \le \delta_{max}}; 2. \mathsf{\delta (a^{*} - b^{*}) \le \vartheta  \delta_{max}}.

Здесь \mathsf{\delta_{max} = \left\{ {\delta (a^{*}), \delta (b^{*})} \right\}}, а \mathsf{\vartheta = {\left| {{a+b}\over {a-b}} \right|}} [1].

Первое из равенств означает, что при суммировании чисел одного знака не происходит потери точности, если оценивать точность в относительных единицах. Совсем иначе обстоит дело при вычитании чисел одного знака. Здесь граница относительной ошибки возрастает в \mathsf{\vartheta > 1} раз и возможна существенная потеря точности. Если числа \mathsf{a} и \mathsf{b} близки настолько, что \mathsf{{\left| {a+b} \right|} \gg {\left| {a-b} \right|}},то \mathsf{\vartheta \gg 1} и не исключена полная или почти полная потеря точности. Когда это происходит, говорят о катастрофической потери точности.

При построении численного метода решения задачи следует избегать вычитания близких чисел одного знака. Если же такое вычитание неизбежно, то следует вычислять аргументы с повышенной точностью, учитывая ее потерю примерно \mathsf{\vartheta} раз.

*Правило3:* Для относительных погрешностей произведения и частного приближенных чисел верны оценки:

1. \mathsf{\delta (a^{*}b^{*}) \le \delta (a^{*})+\delta (b^{*})+\delta (a^{*})\delta (b^{*})}; 2. \mathsf{\delta {\left( {{a^{*}} \over {b^{*}}} \right)} \le {{\delta (a^{*})+\delta (b^{*})} \over {1-\delta (b^{*})}}};

в последней из которых \mathsf{\delta (b^{*}) < 1}[1].

Приведенные равенства чаще всего используют для практической оценки погрешности.

Выполнение арифметических операций над приближенными числами, как правило, сопровождается потерей точности. Единственная операция, при которой потеря не происходит, — это сложение чисел одного знака. Наибольшая потеря точности может произойти при вычитании близких чисел одного знака.

**Погрешности элементарных функций**

1. *Погрешность функции многих переменных*

Пусть \mathsf{f(x)=f(x_{1}, ..., x_{m})}— дифференцируемая в области \mathsf{G} функция \mathsf{m} переменных, вычисление которой производится при приближенно заданных значениях аргументов \mathsf{x_{1}^{*}, ..., x_{m}^{*}}, тогда для абсолютной погрешности значения \mathsf{y^{*}=f(x^{*})}справедлива следующая оценка:

\mathsf{{\vartriangle {(y^{*})}} \le {\sum_{j=1}^m {{\begin{matrix} {max} \\ {\left[ {x, x^{*}} \right]}\end{matrix}}\cdot{\left| {f'_{x_{j}}} \right|}\cdot{\vartriangle (x^{*}_{j})}}}}

Здесь \mathsf{\left[ {x, x^{*}} \right]}- отрезок, соединяющий точки \mathsf{x}и \mathsf{x^{*}}: множество точек вида \mathsf{  \alpha x+(1-  \alpha)x^{*}}, где \mathsf{0   \le   \alpha   \le 1}; а \mathsf{f'_{x_{j}}= {{\partial {f}}\over {\partial x_{j}}}}.

Оценка вытекает из формулы конечных приращений Лагранжа [1].

Для оценки границ относительных погрешностей используют равенство:

\mathsf{{\bar{\delta} {(y^{*})}}   \approx   {\sum_{j=1}^m { {\vartheta^{*}_{j}}\cdot{\bar{\delta} (x^{*}_{j})}}}}

Здесь \mathsf{  \vartheta ^{*}_{j}={{{\left| {x_{j}^{*}} \right|}{\left| {f'_{x_{j}}(x^{*})} \right|}}\over{{\left| {f(x^{*})} \right|}} }}.

2. *Погрешность неявной функции*

Нередко приходится сталкиваться с ситуацией, когда функция \mathsf{y=f(x_{1}, ..., x_{m})}задается не явной формулой, а как решение нелинейного уравнения \mathsf{F(y, x_{1}, ..., x_{m})=0}, т.е. неявно. Если для такой неявной функции воспользоваться известными формулами вычисления производных:

\mathsf{f'_{x_{j}}(x)= {\left( {{-F'_{x_{j}}}\over{F'_{y}}}  \right)}\left|\begin{matrix} j=\overline{1,m} \\ y=f(x) \end{matrix}\right.}то исследование неустранимой погрешности неявной функции сразу же сводится к рассмотренному выше случаю.

**Прямая задача теории погрешностей**

Основная задача теории погрешностей состоит в том, чтобы определить по известным погрешностям параметров погрешность функции от этих параметров.

Пусть задана дифференцируемая функция \mathsf{y=f(x_{1}, x_{2},...,x_{n})}и пусть \mathsf{\vartriangle x^{*}_{i}}- абсолютные погрешности аргументов. Тогда абсолютная погрешность функции (формула Лагранжа):

\mathsf{{\vartriangle y^{*}}={\left| {y-y^{*}}\right|}\le{{\sum_{i=1}^n \left| {  \frac{\partial f(x^{*}_{1},...,x^{*}_{n})}{\partial x_{i}} }\right|\vartriangle x^{*}_{i}}}}

При зависимости функции от одного параметра:

\mathsf{{\vartriangle y^{*}}={{\left|{f'(x^{*})}\right|\vartriangle x^{*}}}}

Предельной абсолютной погрешностью функции называют следующую оценку погрешности величины \mathsf{y^{*}}:

\mathsf{{\vartriangle y^{*}}={sup {{\begin{matrix} {max} \\ {\left( {x,..., x_{n}} \right) \in G}\end{matrix}}}\left| {y(x_{1},...,x_{n})-y^{*}} \right|}}

Пусть задана дифференцируемая функция \mathsf{y=f(x_{1}, x_{2},...,x_{n})}и пусть \mathsf{  \delta x^{*}_{i}}- относительные погрешности аргументов. Тогда относительная погрешность функции:

\mathsf{\vartriangle y^{*}}={\left| {y-y^{*}}\right|}\le{{\sum_{j=1}^n \left| {  \frac{\partial f(x^{*}_{1},...,x^{*}_{n})}{\partial x_{i}} }\right|\vartriangle x^{*}_{i}}}или \mathsf{{  \delta  y}={{\sum_{i=1}^n \left| { x_{i} \frac{\partial ln (y)}{\partial x_{i}} }\right|  \delta  x_{i}}}}

Предельной относительной погрешностью функции называю величину \mathsf{{\vartriangle y^{*}}\over{\left| {y^{*}}\right|}}.

Рассмотрим частные случаи.

Предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых:

\mathsf{{\vartriangle y^{*}}={\sum_{i=1}^n \vartriangle_{x_{i}}}}

Формула дает максимально возможное значение предельной абсолютной погрешности суммы, которое достигается, если погрешность каждого слагаемого принимает наибольшее из возможных значений, и погрешности всех слагаемых имеют одинаковые знаки. При большом количестве слагаемых такое неблагоприятное стечение обстоятельств маловероятно. Погрешности отдельных слагаемых, как правило, имеют различные знаки и частично компенсируют друг друга.

Предельная относительная погрешность суммы оценивается следующим образом:

\mathsf{{  \delta  y^{*}}={\sum_{i=1}^n {{x^{*}_{i}} \over {y^{*}}}\delta  x^{*}_{i}}}

Пусть \mathsf{M={\begin{matrix} {max} \\ {i=\overline {1,n} }\end{matrix}}(  \delta x^{*}_{i})}, а \mathsf{m={\begin{matrix} {min} \\ {i=\overline {1,n} }\end{matrix}}(  \delta x^{*}_{i})}, тогда:

\mathsf{{m} \le { \delta  y^{*}} \le {{(x^{*}_1+...+x^{*}_{n})\cdot M}\over {y^{*}}}}

Если все числа \mathsf{x^{*}_1,...,x^{*}_{n}}одного знака (арифметическая сумма), и относительная погрешность удовлетворяет неравенству \mathsf{{\delta  y} \le M}становится очевидным, что для повышения точности суммы в первую очередь необходимо уточнить слагаемые с наибольшей относительной погрешностью. (Андреев-8)

Остановимся на вычислении предельной относительной погрешности разности. Пусть \mathsf{n=2}и числа \mathsf{x^{*}_1,x^{*}_{2}}разных знаков, тогда:

\mathsf{{\delta  y} ={{\vartriangle x_{1}+ \vartriangle x_{2}}\over{||x_{1}|-|x_{2}||}}}

При малой абсолютной погрешности близких чисел \mathsf{x^{*}_1,x^{*}_{2}}относительная погрешность их разности может быть весьма большой. Это явление называется *потерей* точности *при вычитании близких чисел. При приближенных вычислениях следует избегать вычитания близких чисел, преобразовывая выражения, приводящие к подобным операциям.*

Погрешность степенного выражения \mathsf{y ={x^{p_{1}}_{1}\cdot ... \cdot x^{p_{k}}_{k}}}расчитывается следующим образом:

\mathsf{{  \delta y} ={{|p_{1}|\vartriangle_{x_{1}}\over{|a_{1}|}} +...+{{|p_{k}|\vartriangle_{x_{k}}}\over{|a_{k}|}}}={{|p_{1}|  \delta_{x_{1}}} +...+{{|p_{k}| \delta_{x_{k}}}}}}

Зная \mathsf{\delta y}, предельную абсолютную погрешность можно найти по формуле \mathsf{\vartriangle_{y}=|y|\delta_{y}}.

Отметим несколько полезных следствий из полученной формулы:

1. Предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей

2. \mathsf{y=h \cdot x}, \mathsf{  \delta _{h}=0}. При умножении приближенного числа на точный множитель \mathsf{h}предельная относительная погрешность приближенного числа не меняется \mathsf{  \delta _{y}=  \delta _{x}}, а предельная абсолютная погрешность увеличивается в \mathsf{|h|}раз \vartriangle \_{y}.

3. \mathsf{y=x^{m}}, \mathsf{m>1}. Предельная относительная погрешность степени приближенного числа умножается на показатель степени \mathsf{  \delta _{y}= m \cdot \delta _{x}}.

4. \mathsf{y=  \sqrt[m]{x}}Предельная относительная погрешность корня из приближенного числа делится на показатель корня \mathsf{  \delta _{y}= {\delta _{x}}\over{m}}.

**Обратная задача теории погрешностей и ее решение методом равных влияний**

Обратная задача теории погрешностей состоит в том, чтобы определить с какой точностью необходимо задавать значения аргументов функции \mathsf{f=f(x_{1},...,x_{k})}, чтобы ее погрешность не превосходила заданной величины \mathsf{  \epsilon} ? Эта задача математически неопределена, так как заданную погрешность \mathsf{\vartriangle_{f}=  \epsilon}можно обеспечить при любом наборе предельных абсолютных погрешностей аргументов удовлетворяющих условию:

\mathsf{\epsilon  = {\sum_{j=1}^k {\left| {f'_{x_{j}}} \right|}\cdot{\vartriangle_{x_{j}}}}}

Простейшее решение обратной задачи дает принцип равных влияний, согласно кото- рому вклады всех аргументов в формирование абсолютной погрешности функции равны:

\mathsf{{{\epsilon} \over {k}} = {\left| {f'_{x_{j}}} \right|}\cdot{\vartriangle_{x_{j}}}}

Отсюда

\mathsf{\vartriangle_{x_{j}}={{  \epsilon }\over{k \cdot \left| {f'_{x_{j}}} \right|}}}, где \mathsf{j=\overline {(1,k)}}

Иногда при решении обратной задачи по принципу равных влияний абсолютные погрешности отдельных аргументов оказываются настолько малыми, что вычислить или измерить эти величины с соответствующей точностью невозможно. В таком случае отступают от принципа равных влияний, чтобы увеличение погрешности одних переменных компенсировать уменьшением погрешности других.

**Контрольные вопросы к лекции №1**

1. Основные источники погрешностей?

2.Абсолютная и относительная погрешности?

3. Абсолютная и относительная погрешности арифметических операций?

4. Прямая задача теории погрешностей?

5.Обратная задача теории погрешностей?

**Раздел 1. Погрешности и приближенное решение уравнений**

**Тема 2. Приближенное решение уравнений**

Лекция №2

**Тема лекции: Приближенное решение уравнений**

**Содержание лекции №2**

1. Графический метод решения. Отделение корней уравнения.

2. Метод хорд (правило пропорциональных частей).

3. Метод касательных (Ньютона).

4. Комбинированный метод хорд и касательных.

5. Метод итераций.

**Основная и дополнительная литература к лекции № 2**:

а) основная: 1,2,3;

б) дополнительная: 4-8;

в) интернет-ресурсы: 2-4,10-13,14-16.

**1. Графический метод решения. Отделение корней уравнения.**

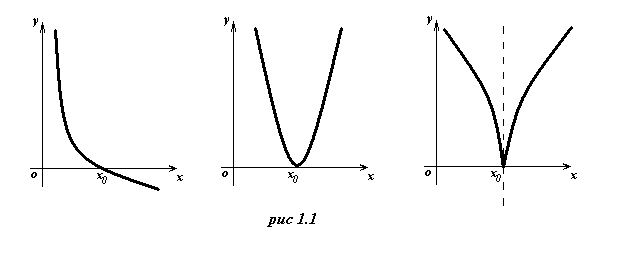
**Корнем уравнения**

***f (x) = 0*** (1)

**называется такое значение  *х = х0* при котором уравнение (1) превращается в тождество:**

***f (x0 ) = 0***

Корень уравнения геометрически представляет собой абсциссу точки пересечения, касания или другой общей точки графика функции *у = f(x)* и оси *ОХ* (рис.1.1).



**Отделить корень уравнения –** значит найти такой конечный промежуток, внутри которого имеется единственный корень данного уравнения.

***Графический метод отделения корней.***

Отделение корней уравнения (1) можно выполнить графически, построив график функции *у = f(x),* по которому можно судить о том, в каких промежутках находится точка пересечения его с осью ОХ. В некоторых случаях целесообразно представить уравнение *f(x)=0*в виде:

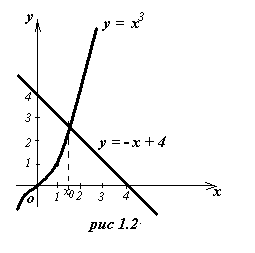
***f1(x) = f2(x****)* (2)

с таким расчетом, чтобы графики функций *у = f1(x)* и *у = f2(x)* строились по возможности проще. Корень уравнения (2) представляет собой абсциссу точки пересечения графиков *у = f1(x)* и *у = f2(x)*. Таким способом можно найти, например, корни уравнения *х3 + px + q = 0;* это будут точки пересечения кубической параболы у = х3  и прямой у = - *px – q.*

***Метод исследования отрезков.***

**Теорема 1.** Если на отрезке [a; b] функция *у = f(x)* непрерывна,  сохраняет свой знак (является монотонной), а значения *f(x)* на концах этого отрезка имеют разные знаки, то на этом отрезке имеется один и только один корень уравнения.

**Пример 1.1** Отделить корни уравнения *х3 + х – 4 = 0.*

**Решение.**

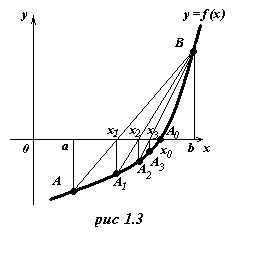
**I способ** (графический метод-*отделение корней*):

Рассмотрим уравнение *х3 + х – 4 = 0.* Придадим заданному уравнению вид *х3 = - х + 4* и построим графики функций *у = х3* и *у = - х + 4.* Эти графики пересекаются в точке, которая принадлежит интервалу (1; 2) (рис 1.2).

**II способ** (исследование отрезков-*отделение корней*):

В данном случае  *f(x)= х3 + х – 4, = 3х2 + 1.* Так как *>0* при всех *х,* то функция *f(x)* возрастает на промежутке . Корень считается отделенным, если указан конечный промежуток на котором он находится. Методом проб находим отрезок [a ; b], для которого *f (a)\*f(b) < 0.* Для этого вычислим значения функции при некоторых значениях аргумента: *f (0) = -4<0, f (1) = -2 < 0, f (2) = 6 > 0.* Поскольку *f (0)\* f(1 ) > 0,* то на отрезке [0 ; 1] корней нет; так как *f (1) f(2) < 0,*  то корень уравнения находится на отрезке [1 ; 2].

**2. Правило пропорциональных частей (метод хорд)**

**Метод хорд** – это метод приближенного решения уравнения (1) имеет следующую геометрическую иллюстрацию: вместо точки пересечения оси ОХ и графика функции *у = f(x),* входящей в это уравнение, рассматривается точка пересечения данной оси и отрезка прямой, соединяющей концы дуги графика. Пусть требуется вычислить действительный корень уравнения *f(x) = 0*, изолированный на отрезке [a; b]. Рассмотрим график функции *у = f(x).* Пусть *f (a) < 0,* а  *f(b) > 0.*

Точки А *(a; f (a))* и *В (b; f(b))*соединим хордой. Найдем точку *х1*:

 (3)

Если *f (х1) < 0 ,* то за новый, более узкий, интервал изоляции можно взять отрезок[*х1*; b]. Соединив точки А1*(х1; f (х1))* и *В (b; f(b ))*, получим в точке пересечения хорды с осью второе приближение *х2*, которое вычислим по формуле:

 (4)

и т. д. Последовательность чисел *а, х1, х2 ....*стремится к искомому корню *х0*. Вычисления следует вести до тех пор, пока не перестанут изменяться те десятичные знаки, которые мы хотим сохранить в ответе (т.е. пока не будет достигнута заданная степень точности).

**Пример 1.2:** Методом хорд найти положительный корень уравнения *х4 - 2х – 4 = 0*  с точностью до 0,01

**Решение.**  Положительный корень будет находиться в промежутке (1; 1,7), т.к. *f (1) = -5<0,* а *f (1,7) = 0,952>0.* Найдем первое приближенное значение корня по формуле (3):

**,** где *а = 1, b=1,7*

Получим =1,588

Так как *f (1,588) = -0,817 < 0,* то применяя вторично способ хорд к промежутку (1,588; 1,7) получим: = 1,639; *f ( 1,639* *) = -0,051 < 0.*

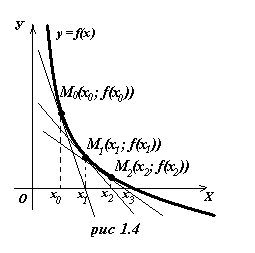
Найдем третье приближенное значение на промежутке (1,639; 1,7)

получим: = 1,642; *f ( 1,642* *) = -0,016 < 0.*

Найдем четвертое приближенное значение на отрезке (1,642; 1,7)

получим: = 1,643; *f ( 1,643* *) =-0,004>0.*

Следовательно, искомый корень с точностью до 0,01 равен 1,64 (до тех пор, пока значение в точке f(xi) по модулю не станет меньше заданной точности 0,01).

**3. Метод касательных (Ньютона)**

**Метод касательных** –это метод отделения корней. **Метод касательных** отличается от метода хорд тем, что здесь рассматривается не секущая, соединяющая концы дуги графика, а касательная к графику. Точка пересечения касательной с осью ОХ дает приближенное значение корня.

Пусть действительный корень уравнения *f(x) = 0* изолирован на отрезке [a; b]. Выберем на отрезке [a; b] такое число х0, при котором  имеет тот же знак что и , т.е. выполняется условие

>0 (5)

Проведем в точке *М0 (х0;* *)* касательную к кривой

*у = f(x)*. За приближенное значение корня примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью ОХ. Это приближенное значение корня найдется по формуле:

 (6)

Применив этот метод вторично в точке М1 (х1; ), получим:

 (7)

и т.д. Полученная таким образом последовательность *х0, х1, х2 ....* имеет своим пределом искомый корень.

**Пример 1.3:**Методом касательных найти положительный корень уравнения *х4 - 2х – 4 = 0*  с точностью до 0,01

**Решение.** Здесь*f(x) = х4 - 2х – 4, =4х3 – 2, = 12х2.*

Так как *f(x)*  и  при *х0=1,7* имеют один и тот же знак, а именно: *f ( 1,7* *) = 0,952 > 0* и = *34,68> 0,* то применяя формулу  где *=17,652.*

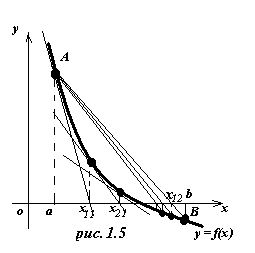
Тогда *= 1,646.*

Применяя второй раз способ касательных, получим:

, где = *= 0,048, =15,838.* *= 1,643.*

Аналогично получим третье приближение: , *=0,004, =15,740*, следовательно, = *1,6427.*Следовательно, искомый корень с точностью до 0,01 равен 1,64

**4. Комбинированное применение методов хорд и касательных**

Пусть требуется вычислить действительный корень уравнения *f(x) = 0*, изолированный на отрезке [a ; b]. Предполагается, что *f ( a )* и  *f( b* *)* имеют разные знаки (т.е. *f ( a ) f( b* *) < 0* ), а каждая производных сохраняет определенный знак на отрезке изоляции. Возьмем на отрезке [a ; b] такую точку *х0 ,* такую, что  имеет тот же знак что и , т.е. выполняется условие:

>0 .

Воспользуемся способами хорд и касательных:



****

Величины *х11* и *х12* принадлежат промежутку изоляции, причем  и  имеют разные знаки.

Построим новую пару приближений к корню:



****

Точки *х21* и *х22*  на числовой оси между точками *х11* и *х12,* причем и  имеют разные знаки.

и т. д. Каждая из последовательностей:

*х11, х21 , х31 .............*

*х12, х22 , х32 .............*

стремится к искомому корню, причем одна из последовательностей монотонно возрастает, а другая монотонно убывает.

**Пример 1.4:**

Комбинируя способы хорд и касательных найти приближенное значение корня уравнения

*х3 + х2 -11 = 0* , изолированного в промежутке (1; 2) с точностью до 0,001.

**Решение.**

Имеем *f(x) = х3 + х2 -11, =3х2+2х = 6х+2.*  В указанном промежутке >0, поэтому за первое приближение в способе касательных берем *х0=2,* так как *f(2)=1*>0;



****

Искомый корень принадлежит промежутку *(1,9; 1,94).*

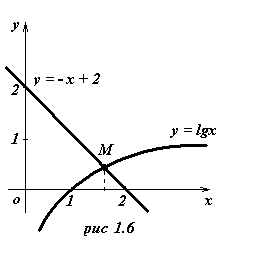
*f(1,9)= -0,531, f(1,94) =-0,065, *

Следовательно, 

****

**Так как значения** *х21* и*х22* , вычисленные с точностью до 0,001, совпали, то приближенным значением корня будет *1,936.*

**5. Метод итераций**



Если каким нибудь способом получено приближенное значение *х0* корня уравнения, то уточнение приближения можно осуществить методом итераций (методом последовательных приближений).

Пусть задано уравнение *f(x) = 0,* представим его в виде , где *<1* всюду на отрезке [a ; b], содержащем единственный корень . Исходя из некоторого начального значения  можно построить последовательность: , ,  .......  ...

Пределом последовательности *х1, х2, х3, ..... хп ....* является единственный корень уравнения *f(x) = 0* на отрезке [a ; b].

**Пример 1.5:**Способом итераций найти приближенное значение корня уравнения *2 – lgx – x = 0*  с точностью до *0.001*

**Решение.**

Найдем интервал изоляции действительного корня уравнения.

Представим уравнение в виде:

*lgx = – x + 2*

Построим графики функций *у = lgx* и *у = – x + 2.* Точка М пересечения графиков имеет абсциссу в промежутке [1; 2]. Пусть *х0 = 1.* Запишем исходное уравнение в виде *х =* *2 – lgx*.

= *2 – lgx,* 

 в промежутке [1; 2], следовательно, способ итераций применим.

Найдем приближения:

****

****

****

****

****

****

****

Таким образом, искомый корень с точностью до *0,001* равен *1,755*

**Контрольные вопросы к лекции №2**

1. Графический метод решения.

2.Отделение корней уравнения.

3. Метод хорд (правило пропорциональных частей).

4. Метод касательных (Ньютона).

5. Комбинированный метод хорд и касательных.

6. Метод итераций.

**Контрольные упражнения к лекции №2**

**1.Отделить корни уравнения графически и методом исследования отрезков.**

1. *х3 – 12х + 1 = 0. (Ответ: (-4;-3), (0;1),(3;4))*
2. *х3 + 2х - 7 = 0. (Ответ: (1;2))*
3. *х3 – 9х2 + 18х - 1 = 0. (Ответ: (0;1), (2;3),(6;7))*

**2.Решить способом хорд и касательных с точностью до 0,01 следующие уравнения:**

1. *х4 + 3х - 20 = 0. (Ответ: 1,94)*
2. *х3 - 2х - 5 = 0. (Ответ: 2,09)*
3. *х4 - 3х + 1 = 0. (Ответ: 0,33; 1,30)*
4. *х3 + 3х + 5 = 0. (Ответ: -1,15)*

**3.Применив комбинированный способ хорд и касательных решить уравнение.**

1. *х4 + 5х - 7 = 0. (Ответ: 1,11)*

**4.Решить способом итераций с точностью до 0,01 следующие уравнения.**

1. *х3 - 12х + 5 = 0. (Ответ: 0,42)*
2. *х4 - 2х2 - 4х - 7 = 0. (Ответ: 3,62)*

**Раздел 2. Приближенное решение систем уравнений**

**Тема 3. Решение систем линейных алгебраических уравнений**

Лекция №3

**Тема лекции: Решение систем линейных алгебраических уравнений**

**Содержание лекции №3**

1. Метод Крамера.

2. Метод Гаусса.

3. Метод итераций (метод Якоби).

4. Метод Зейделя.

**Основная и дополнительная литература к лекции №3**:

а) основная: 1,2,3;

б) дополнительная: 4 -8;

в) интернет-ресурсы: 2-4,8,10-13,14-16.

**1. Метод Крамера**

**Метод Крамера (правило Крамера)** — способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы (причём для таких уравнений решение существует и единственно). Создан Габриэлем Крамером в 1751 году.

**Описание метода**

Для системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными (над произвольным полем)

\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots\cdots\\ 
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n\\
\end{cases}

с определителем матрицы системы Δ, отличным от нуля, решение записывается в виде

x_i=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 
a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1  & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \ldots & a_{n-1,n} \\
a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \\
\end{vmatrix}

(i-ый столбец матрицы системы заменяется столбцом свободных членов).  
В другой форме правило Крамера формулируется так: для любых коэффициентов c1, c2, …, cn справедливо равенство:

(c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n)\cdot\Delta = -\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n\\
c_{1}  & c_{2}  & \ldots & c_{n}  & 0\\
\end{vmatrix}

В этой форме формула Крамера справедлива без предположения, что Δ отлично от нуля, не нужно даже, чтобы коэффициенты системы были бы элементами целостного кольца (определитель системы может быть даже делителем нуля в кольце коэффициентов). Можно также считать, что либо наборы *b*1,*b*2,...,*bn* и *x*1,*x*2,...,*xn*, либо набор *c*1,*c*2,...,*cn* состоят не из элементов кольца коэффициентов системы, а какого-нибудь модуля над этим кольцом. В этом виде формула Крамера используется, например, при доказательстве формулы для определителя Грама и Леммы Накаямы.

**Пример**

Система линейных уравнений:

\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\\
\end{cases}

Определители:

\Delta=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
\end{vmatrix},\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix}
b_1 & a_{12} & a_{13} \\
b_2 & a_{22} & a_{23} \\
b_3 & a_{32} & a_{33} \\
\end{vmatrix},\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}
a_{11} & b_1 & a_{13} \\
a_{21} & b_2 & a_{23} \\
a_{31} & b_3 & a_{33} \\
\end{vmatrix},\ \ \Delta_3=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & b_3 \\
\end{vmatrix}

Решение:

x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}

Пример:

\begin{cases}
2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 30\\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 150\\
2x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 110\\
\end{cases}

Определители:

\Delta_1=\begin{vmatrix}30&5&4\\150&3&2\\
110 & 10 & 9 \\
\end{vmatrix}=-760,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}
2 & 30 & 4 \\
1 & 150 & 2 \\
2 & 110 & 9 \\
\end{vmatrix}=1350,\ \ \Delta_3=\begin{vmatrix}
2 & 5 & 30 \\
1 & 3 & 150 \\
2 & 10 & 110 \\
\end{vmatrix}=-1270.

x_1=-\frac{760}{5}=-152,\ \ x_2=\frac{1350}{5}=270,\ \ x_3=-\frac{1270}{5}=-254

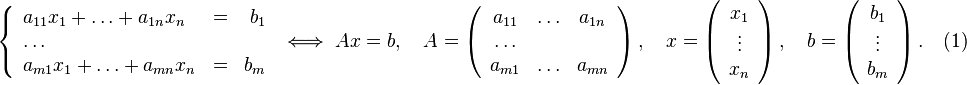
Из-за высокой вычислительной сложности метода — требуется вычисление *n* + 1 определителя размерности n\times n, он не применяется для машинного решения больших СЛАУ. Время, необходимое на вычисление одного определителя примерно такое же, как и время на решение одной системы уравнений при использовании метода Гаусса. Однако он иногда используется при ручном счёте и в теоретических выкладках

**2. Метод Гаусса**

**Метод Геусса** **(последовательного исключения неизвестных)** — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы.

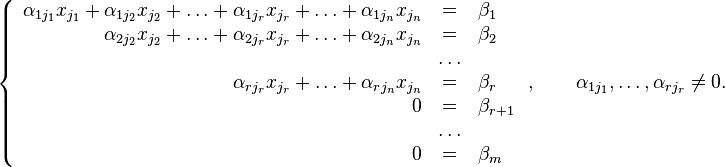
**Описание метода**

Пусть исходная система выглядит следующим образом



Матрица Aназывается основной матрицей системы, b — столбцом свободных членов.

Тогда, согласно свойству элементарных преобразований над строками, основную матрицу этой системы можно привести к ступенчатому виду (эти же преобразования нужно применять к столбцу свободных членов):



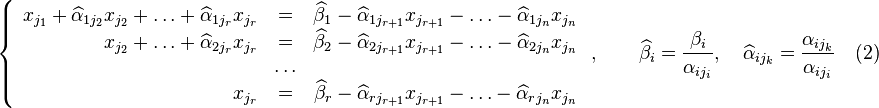
При этом будем считать, что базисный минор (ненулевой минор максимального порядка) основной матрицы находится в верхнем левом углу, то есть в него входят только коэффициенты при переменных x_{{j_{1}}},\ldots ,x_{{j_{r}}}\![[3]](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%93%D0%B0%D1%83%D1%81%D1%81%D0%B0#cite_note-3).

Тогда переменные x_{{j_{1}}},\ldots ,x_{{j_{r}}}\!называются *главными переменными*. Все остальные называются *свободными*.

Если хотя бы одно число \beta _{i}\neq 0\!, где i>r, то рассматриваемая система [несовместна](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%85_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9), т.е. у неё нет ни одного решения.

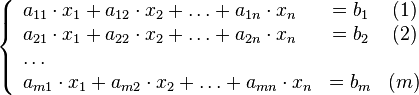
Пусть \beta _{i}=0\!для любых i>r.

Перенесём свободные переменные за знаки равенств и поделим каждое из уравнений системы на свой коэффициент при самом левом x\!(\alpha _{{ij_{i}}},\,i=1,\ldots ,r\!, где i\! — номер строки):

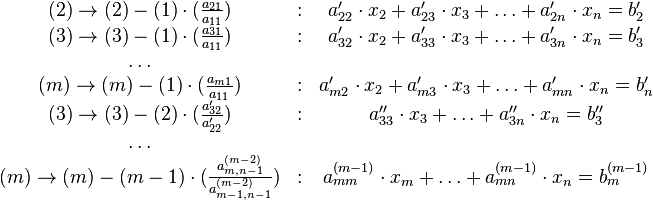
,  
где i=1,\ldots ,r,\quad k=i+1,\ldots ,n.\!

Если свободным переменным системы (2) придавать все возможные значения и решать новую систему относительно главных неизвестных снизу вверх (то есть от нижнего уравнения к верхнему), то мы получим все решения этой СЛАУ. Так как эта система получена путём элементарных преобразований над исходной системой (1), то по теореме об эквивалентности при элементарных преобразованиях системы (1) и (2) эквивалентны, то есть множества их решений совпадают.

**Простейший случай.**

В простейшем случае алгоритм выглядит так:  


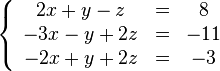
* Прямой ход:



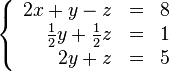
* Обратный ход. Из последнего ненулевого уравнения выражаем базисную переменную через небазисные и подставляем в предыдущие уравнения. Повторяя эту процедуру для всех базисных переменных, получаем фундаментальное решение.

**Пример.**

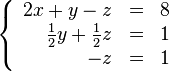
Покажем, как методом Гаусса можно решить следующую систему:



Обнулим коэффициенты при x\! во второй и третьей строчках. Для этого вычтем из них первую строчку, умноженную на \textstyle -{\frac  {3}{2}}\! и -1\!, соответственно:



Теперь обнулим коэффициент при y\! в третьей строке, вычтя из неё вторую строку, умноженную на 4\!:



В результате мы привели исходную систему к треугольному виду, тем самым закончим первый этап алгоритма.

На втором этапе разрешим полученные уравнения в обратном порядке. Имеем:

z=-1\!из третьего;

y=3\! из второго, подставив полученное z\!

x=2\! из первого, подставив полученные z\!и y\!.

Таким образом исходная система решена.

В случае, если число уравнений в совместной системе получилось меньше числа неизвестных, то тогда ответ будет записываться в виде фундаментальной системы решений.

**3. Метод итераций (метод простой итерации Якоби)**

Метод Гаусса обладает довольно сложной вычислительной схемой. Кроме того, при вычислениях накапливается ошибка округления, что может привести к недостаточно точному результату. Рассмотрим метод простой итерации Якоби, свободный от этих недостатков, хотя требующий приведения исходной системы уравнений к специальному виду.

Для того, чтобы применить метод простой итерации, необходимо систему уравнений

***Ax = b*** (1)

с квадратной невырожденной матрицей ***A*** привести к виду

***x = Bx + c,*** (2)

где ***B*** – квадратная невырожденная матрица с элементами *bij, i, j =* 1, 2, …, *n,* ***x*** – вектор-столбец неизвестных xi*,* ***c*** – вектор-столбец с элементами *ci, i =* 1, 2, …, *n*.

Существуют различные способы приведения системы (1) к виду (2). Рассмотрим самый простой. Представим систему (2) в развернутом виде:

*a*11*x*1 *+ a*12*x*2 *+ a*13*x*3 *+ … + a*1*nxn = b*1

*a*21*x*1 *+ a*22*x*2 *+ a*23*x*3 *+ … + a*2*nxn = b*2

*a*31*x*1 *+ a*32*x*2 *+ a*33*x*3 *+ … + a*3*nxn = b*3(3)

*an*1*x*1 *+ an*2*x*2 *+ an*3*x*3 *+ … + annxn = bn*

Из первого уравнения системы (3) выразим неизвестную *x*1:

*x*1 = *a11*(*b*1 *– a*12*x*2*– a*13*x*3 *– … –  a*1*nxn*),

из второго уравнения – неизвестную *x*2*:*

*x*2 = *a22*(*b*2 *– a*21*x*1*– a*23*x*3 *– … –  a*2*nxn*),

и т. д. В результате получим систему:

*x*1=*0 + b*12*x*2 *+ b*13*x*3 *+ … + b*1*,n-*1*xn-*1*+ b*1*nxn* + *c*1

*x*2= *b*21*x*1*+ 0 + b*23*x*3 *+ … + b*2*,n-*1*xn-*1*+ b*2*nxn* + *c*2

*x*3= *b*31*x*1 *+ b*32*x*2 *+ 0 + … +b*3*,n-*1*xn-*1+*b*3*nxn*+ *c*3(4)

*…*

*xn= bn*1*x*1 *+ bn*2*x*2 *+ bn*3*x*3*+ … +bn,n-*1*xn-*1*+0*+ *cn*

Матричная запись системы (4) имеет вид (3). На главной диагонали матрицы ***B*** находятся нулевые элементы, а остальные элементы вычисляются по формулам:

*bij = ,  ci = , i, j =* 1,2, …*n, i j.* (5)

Очевидно, что  диагональные элементы матрицы ***A*** должны быть отличны от нуля.

Выберем произвольно начальное приближение. Обычно в качестве первого приближения берут *x0= ci* или *x0=* 0*.*

Подставим начальное приближение в правую часть (4). Вычисляя левые части, получим значения *x1, x2, …, xn.* Продолжая этот процесс дальше, получим последовательность приближений, причем (*k* + 1)-е приближение строится следующим образом:

*x1= 0 +   b12 x2  + b13 x3 + … + b1,n-1 xn-1 + b1n xn + c1*

*x2= b21 x1 +0+ b23 x3 + … + b2,n-1 xn-1 + b2n xn+ c2*

*x3= b31 x1  +  b32 x2  + 0 + … + b3,n-1 xn-1 +b3n xn + c3*(6)

*…*

*xn=bn1 xn  +  bn2 x2 + bn3 x3 + … +bn,n-1 xn-1 +0   + cn*

Система (6) представляет собой *расчетные формулы метода простой итерации Якоби*.

**Сходимость метода простой итерации.** Известно следующее *достаточное* условие сходимости метода простой итерации Якоби.

Если элементы матрицы  ***A*** удовлетворяют условию (диагональный элемент больше суммы элементов строки):

|*aii*| >|*aij*| , *i =* 1, 2, …, *n*.                                                            (7)

то итерационная последовательность ***xk***  сходится к точному решению ***x\****.

Условие (3.28) называют ***условием преобладания диагональных*** элементов матрицы  ***A***, так как оно означает, что модуль диагонального элемента *i-*ой строки больше суммы модулей остальных элементов этой строки, *i =* 1, 2, …, *n*.

Необходимо помнить, что условие сходимости (3.28) является лишь достаточным. Его выполнение гарантирует сходимость метода простых итераций, но его невыполнение, вообще говоря, не означает, что метод расходится.

Справедлива следующая апостериорная оценка погрешности:

max| *xk+1–* *xk* | £ max| *xk+1–* *xk* |,  *i =* 1, 2, …, *n,*                             (8)

где *b  =* max |*bij*| *i, j  =* 1, 2, …, *n.*

Правую часть оценки (3.29) легко вычислить после нахождения очередного приближения.

***Критерий окончания.*** Если требуется найти решение с точностью *e*, то в силу (8) итерационный процесс следует закончить, как только на (*k+*1)-ом шаге выполнится неравенство:

max|*xk+1–* *xk*| < *e*, *i =* 1, 2, …, *n.*                        (9)

Поэтому в качестве критерия окончания итерационного процесса можно использовать неравенство

max| *xk+1–* *xk* | < *e*1*,*  *i =* 1, 2, …, *n.* (10)

где *e*1 *= e.*

Если выполняется условие *b* £ , то можно пользоваться более простым критерием окончания:

max| *xk+1–* *xk* | < *e*, *i =* 1, 2, …, *n*.                                                         (11)

В других случаях использование критерия (11) неправомерно и может привести  к преждевременному окончанию итерационного процесса.

*Пример* 3*.5.*

Применим метод простой итерации Якоби для решения системы уравнений (с точностью *e =* 10-3)

20.9x1 *+* 1.2*x*2 *+* 2.1*x*3 *+* 0.9*x*4*=* 21.70

1.2x1 *+* 21.2*x*2 *+*  1.5*x*3 *+*   2.5*x*4*=* 27.46

2.1x1  *+* 1.5*x*2 *+* 19.8*x*3 *+*  1.3*x*4*=* 28.76                                         (12)

0.9x1  *+* 2.5*x*2 *+* 1.3*x*3 *+* 32.1*x*4*=* 49.72

Заметим, что метод простой итерации сходится, т. к. выполняется условие преобладания диагональных элементов (3.28):

|20.9| > |1.2 + 2.1 + 0.9|,

|21.2| > |1.2| + |1.5| + |2.5|,

|19.8| > |2.1| + |1.5| + |1.3|,

|32.1| > |0.9| + |2.5| + |1.3|.

Пусть требуемая точность *e* = 10-3. Вычисления будем проводить с четырьмя знаками после десятичной точки.

Приведем систему к виду (12):

*x*1 =*–* 0.0574*x*2 *–* 0.1005*x*3*–* 0.0431*x*4*+* 1.0383

*x*2 = *–*0.0566*x*1*–* 0.0708*x*3  *–*  0.1179*x*4*+* 1.2953

*x*3 = *–*0.1061*x*1 *–* 0.0758*x*2*–*  0.0657*x*4*+* 1.4525        (13)

*x*4 = *–*0.0280*x*1 *–* 0.0779*x*2*–* 0.0405*x*3*+* 1.5489

Величина *b =* max |*bij*|*, i, j  =* 1, 2, 3,4 равна 0.1179, т. е. выполняется условие *b* £ , и можно пользоваться  критерием окончания итерационного процесса (3.32).

В качестве начального приближения возьмем элементы столбца свободных членов (для этого приравняем *хi=0*):

*при k =0 – начальное приближение*

*x1*= 1.0383*, x2*= 1.2953*, x3*= 1.4525, *x4*= 1.5489*.* (14)

Вычисления будем вести до тех пор, пока все величины |*xi(+1k)–* *xi(к)*|, *i =* 1, 2, 3, 4, а следовательно, и max|*xk+1–* *xk*| не станут меньше *e =* 10-3.

Последовательно вычисляем:

при *k* = 1 -шаге

*x1*=*–* 0.0574*x2 –* 0.1005*x3  –* 0.0431*x4 +* 1.0383 = 0.7512

*x2* = *–*0.0566*x1                       –* 0.0708 *x3 –*  0.1179 *x4+* 1.2953 = 0.9511

*x3* = *–*0.1061 *x1 –* 0.0758 *x2  –*  0.0657 *x4+* 1.4525  = 1.1423

*x4* = –0.0280 *x1* – 0.0779 *x2*   – 0.0405 *x3*                      + 1.5489 = 1.3601

при *k* = 2 -шаге

*x1=* 0.8106,  *x2=* 1.0118,   *x3=* 1.2117,   *x4=* 1.4077.

при *k* = 3 -шаге

*x1=* 0.7978,    *x2=* 0.9977,     *x3=* 1.1975,   *x4=* 1.3983.

при *k* = 4 -шаге

*x1=* 0.8004,    *x2=* 1.0005,     *x3=* 1.2005,    *x4=*1.4003.

Вычисляем модули разностей значений *xi* при *k* = 3 и *k* = 4:

| *x1(4)– x1(3)|* = 0.0026, *| x2(4)– x2(3)|* = 0.0028,*| x3(4)– x3(3)|* = 0.0030, *| x4(4)– x4(3)|* = 0.0020.

Так как все они больше заданной точности *e =* 10-3, продолжаем итерации.

При *k* = 5

*x1=* 0.7999, *x2=* 0.9999, *x3=* 1.1999, *x4=* 1.3999.

Вычисляем модули разностей значений *x* при *k* = 4 и *k* = 5:

| *x1(5)– x1(4)|* = 0.0005,

*| x2(5)– x2(4)|* = 0.0006,

*| x3(5)– x3(4)|* = 0.0006,

*| x4(5)– x4(4)|* = 0.0004.

Все они меньше заданной точности *e =* 10-3, поэтому итерации заканчиваем. Приближенным решением  системы являются следующие значения:

*x*1*=* 0.7999,   *x*2 =0.9999,   *x*3 =1.1999,   *x*4 =1.3999.

Для сравнения приведем точные значения переменных:

*x*1*=* 0.8,   *x*2*=* 1.0,   *x*3*=* 1.2,   *x*4*=* 1.4.

**4. Метод Зейделя (модификация метода простых итераций Якоби)**

Модификацией метода простых итераций Якоби можно считать метод  Зейделя.

В методе Якоби на (*k*+1)-ой итерации значения *xi(k)*, *i =* 1, 2, …, *n* вычисляются подстановкой в правую часть (3.27) вычисленных на предыдущей итерации значений *xi.*

В методе Зейделя при вычислении *xi* используются значения *xi*  уже найденные на (*k*+1)-ой итерации, а не предыдущие *x, x, …, x*, как в методе Якоби, т.е. (*k* + 1)-е приближение строится следующим образом:

*x1* = *0 +   b*12*x2    + b*13 *x3   + … + b*1*,n-*1 *xn-1 + b*1*n xn*  + *c*1

*x2*= *b*21*x1+  0+ b*23 *x3    + … + b*2*,n-*1 *xn-1  + b*2*n xn* + *c*2

*x3*= *b*31 *x1  +   b*32 *x2    + 0           + … + b*3*,n-*1 *xn-1*+*b*3*n xn*  + *c*3(1)

…

*xn= bn*1 *x1 +  bn*2*x2   + b*23 *x3    + … + bn,n-*1 *xn-1 +0*+ *cn*

Формулы (1) являются *расчетными формулами метода Зейделя*.

Введем нижнюю и верхнюю треугольные матрицы:

0      0      0  … 00*b*12*b*13*…  b*1*n*

*b*210     0  … 000*b*23*…  b*2*n*

***B***1=  *b*31*b*320  … 0         и   ***B***2*=*000*…   b*3*n     .*

*bn*1*bn*2*bn*3*…*00       0       0  …    0

Матричная запись расчетных формул (3.36) имеет вид:

***x****k+*1***= B***1***x****k+*1***+ B***2***x****k****+ c***.(2)

Так как ***B*** = ***B***1***+ B***2, то точное решение ***x***\* исходной системы удовлетворяет равенству:

***x****\*****= B***1***x****\*****+ B***2***x****\*****+ c***.(3)

**Сходимость метода Зейделя.** Достаточным условием сходимости метода Зейделя является выполнение неравенства:

*b =* max |*bij*|*,*< 1, *i, j  =* 1, 2, …, *n.*                                                (4)

Неравенство (4) означает, что для сходимости метода Зейделя достаточно, чтобы максимальный по модулю элемент матрицы ***B*** был меньше единицы.

Если выполнено условие (4), то справедлива следующая апостериорная оценка погрешности:

max|*x - x*| £ max|*x–* *x*|  *i =* 1, 2, …, *n,*                           (5)

где *b –* максимальный элемент матрицы ***B***, *b*2*–* максимальный элемент матрицы ***B***2*.*

Правую часть оценки (3.40) легко вычислить после нахождения очередного приближения.

***Критерий окончания.*** Если требуется найти решение с точностью *e*, то в силу (3.37) итерационный процесс следует закончить как только на (*k+*1)-ом шаге выполнится неравенство:

max|*x–* *x*| < *e,*  *i =* 1, 2, …, *n.*                                           (6)

Поэтому в качестве критерия окончания итерационного процесса можно использовать неравенство

max|*x–* *x*| < *e*1*,*  *i =* 1, 2, …, *n.* (7)

где *e*1 *= e.*

Если выполняется условие *b* £ , то можно пользоваться более простым критерием окончания:

max|*x–* *x*| < *e,*  *i =* 1, 2, …, *n*.                                                      (8)

Метод Зейделя как правило сходится быстрее, чем метод Якоби. Однако возможны ситуации, когда метод Якоби сходится, а метод Зейделя сходится медленнее или вообще расходится.

***Пример. Метод  Зейделя***

Применим метод  Зейделя для решения системы уравнений (3.33) из примера 3.5. Первые шаги полностью совпадают с процедурой решения по методу Якоби, а именно: система приводится к виду (3.34), затем в качестве начального приближения выбираются элементы столбца свободных членов (3.35). Проведем теперь итерации методом Зейделя.

При *k* = 1

*x1*= *–* 0.0574*x2 –* 0.1005*x3  –* 0.0431*x4+* 1.0383 = 0.7512

При вычислении *x2* используем уже полученное значение *x1=*0.7512:

*x2* = *–*0.0566 *x1**–* 0.0708*x3 –*  0.1179*x4+* 1.2953 = 0.9674

При вычислении *x3* используем уже полученные значения *x1=*0.7512и *x2=*0.9674:

*x3* = *–*0.1061 *x1–* 0.0758 *x2  –*  0.0657*x4+* 1.4525  = 1.1977

При вычислении x используем уже полученные значения *x1=*0.7512, *x2=*0.9674 и *x3=*1.1977

*x*4 = –0.0280 *x1* – 0.0779 *x2*  – 0.0405 *x3*  + 1.5489 = 1.4037

Аналогичным образом проведем вычисления при *k* = 2 и  *k* = 3. Получим:

при *k* = 2

*x1* *=* 0.8019,   *x2*  *=* 0.9996,   *x3=* 1.9996,   *x*4*=* 1.4000.

при *k* = 3

*x1* *=* 0.80006,     *x2*  *=* 1.00002,     *x3=* 1.19999,   *x*4*=* 1.40000.

Известны точные значения переменных для данного примера:

*x*1*=* 0.8,   *x*2*=* 1.0,   *x*3*=* 1.2,   *x*4*=* 1.4.

Сравнение с примером 3.5 показывает, что метод Зейделя сходится быстрее и дает более точный результат.

**Контрольные вопросы к лекции №3**

1. Метод Крамера.

2. Метод Гаусса.

3.Метод итераций (метод Якоби), условия сходимости и оценка погрешностей. Приведение системы линейных уравнений к виду, удобному для итераций.

4. Метод Зейделя. Оценка числа итераций.

**Раздел 2. Приближенное решение систем уравнений**

**Тема 4. Приближенное решение систем нелинейных уравнений**

Лекция №4

**Тема лекции: Приближенное решение систем нелинейных алгебраических уравнений**

**Содержание лекции №4**

1. Системы нелинейных уравнений (СНУ).

2. Метод Ньютона (простой итерации).

3. Метод Зейделя.

4. Метод градиента (метод скорейшего спуска).

5.Метод Ньютона-Рафсона.

**Основная и дополнительная литература к лекции №4**:

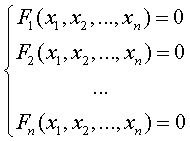
а) основная: 1,2,3;

б) дополнительная: 4 -8;

в) интернет-ресурсы: 2-4,9,10-13,14-16.

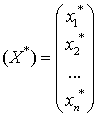
**1.Системы нелинейных уравнений (СНУ)**

При решении задач моделирования поведения химических систем достаточно часто приходится решать системы уравнений, нелинейных по отношению к переменным. Системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными *x*1*, x*2*, ..., xn*  в общем случае принято записывать следующим образом:



где *F*1*, F*2*,…, Fn* – любые функции независимых переменных, в том числе и нелинейные относительно неизвестных.

Как и в случае систем линейных уравнений, решением системы является такой вектор (или векторы) (*X\**), который  при подстановке обращает одновременно все уравнения системы в тождества.

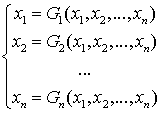


Система уравнений может не иметь решений, иметь единственное решение, конечное или бесконечное количество решений. Вопрос о количестве решений должен решаться для каждой конкретной задачи отдельно.

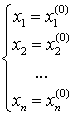
Рассмотрим несколько простейших итерационных методов решения систем нелинейных уравнений (СНУ), а именно, **метод простой итерации, метод Зейделя и метод Ньютона.**

**2.Метод Ньютона (простой итерации)**

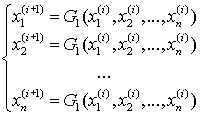
Для реализации этого метода решаемую систему уравнений необходимо путем алгебраических преобразований привести к следующему виду, выразив из каждого уравнения по одной переменной следующим образом:



Выбирая затем вектор начального приближения

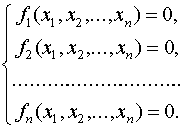
,  

подставляют его в преобразованную систему уравнений. Из первого уравнения получают новое приближение к первой переменной, из второго – второй и т. д. Полученное уточненное значение переменных снова подставляют в эти уравнения и т.д. Таким образом, на (*i+1*)-м шаге итерационной процедуры имеем



**Пример 1.** **Метод Ньютона (метод последовательных приближений).**

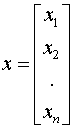
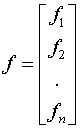
Рассмотрим нелинейную систему уравнений

 (1)

с действительными левыми частями. Систему (5.1) можно представить в матричном виде

Image204 (2)

Здесь приняты следующие обозначения:

- вектор аргументов, а - вектор – функция.

Для решения системы (2) воспользуемся **методом последовательных приближений**.

Предположим, что найдено *р*-ое приближение *xp =* (*x1(p), x2(p) , ..., xn(p)*)одного из изолированных корней *x =* (*x1, x2, x3, ..., xn*) векторного уравнения (2). Тогда точный корень уравнения (2) можно представить в виде

Image207 (3)

где Image208- поправка (погрешность) корня на *n* – ом шаге.

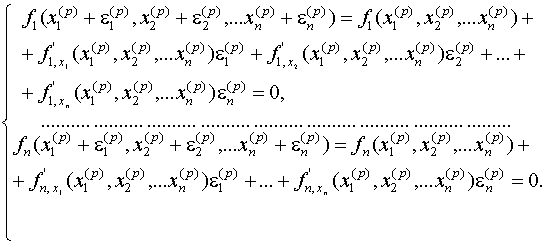
Подставив выражение (3) в (2), получим

Image209 (4)

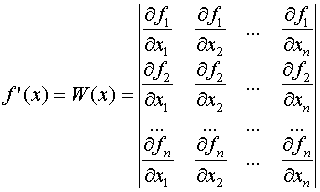
Предположим, что функция *f*(*x*) - непрерывно дифференцируема в некоторой выпуклой области, содержащей *x* и *x(p****)***. Тогда левую часть уравнения (4) разложим в ряд Тейлора по степеням малого вектора *ε(p****)***, ограничиваясь линейными членами:

Image210, (5)

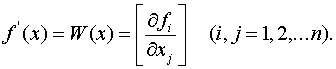
или в развернутом виде:

(6)

Из анализа формул (5.5) и (5.6) следует, что под производной *f¢* (*x*) следует понимать матрицу Якоби системы функций *f1 , f2, ..., fn*, относительно переменных *x1, x2, x3, ..., xn*, то есть:

. (7)

Выражение (7) в краткой записи можно представить:

 (8)

Выражение (6) представляет собой линейную систему относительно поправок Image215(*i =* 1, 2, *..., n*) с матрицей *W*(*x*), поэтому формула (5.5) может быть записана в следующем виде:

Image216 (9)

Отсюда, предполагая, что матрица *W*(*x(p)*) - неособенная, получим:

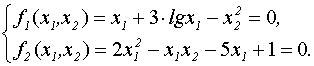
Image217 (10)

Теперь, подставив выражение (5.10) в формулу (5.3), окончательно получим:

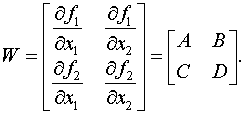
Image218 (11)

Таким образом, получили вычислительную формулу (5.11) **(метод Ньютона)**, где в качестве нулевого приближения ***x(0)*** можно взять приближенное (грубое) значение искомого корня.

**Пример 2.** Рассмотрим применение метода Ньютона на примере системы двух нелинейных уравнений

 (12)

Прежде чем разбирать конкретные шаги по решению системы (12), распишем в общем виде якобиан для системы из двух уравнений



Здесь *A, B, C, D* – функционалы от переменных *x1, x2*. Нас фактически интересует *W-****1***. Пусть матрица *W*- неособенная, тогда обратная матрица вычисляется

Image221

Теперь вернемся к системе (12). Графическое решение этой системы дает две точки пересечения: *М1* (1.4; -1.5) и *М2* (3.4; 2.2). Зададим начальное приближение:

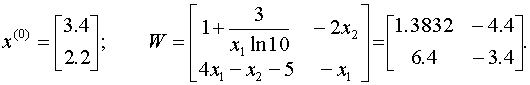


Image223

Используя формулу (11), получим:

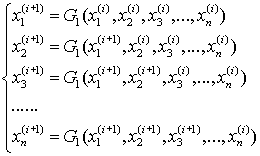
Image224

Аналогично получим:

Image225

**3. Метод Зейделя**

Модификация Зейделя алгоритма простой итерации заключается в использовании уточненных значений переменных уже на текущем итерационном шаге. Так, для уточнения значений первой переменной используются только значения предыдущего шага, для второй переменной – значение *x1* текущего шага, а остальных – от предыдущего и т.д.:

 (1)

**Пример.** Найти корни системы \begin{cases}2x_1^2-x_1x_2-5x_1+1=0,\\ x_1+3\lg x_1-x_2^2=0.\end{cases}

расположенные в первом квадранте, методом Зейделя с точностью \varepsilon=0,\!001.

**Решение**

Преобразование исх. системы к виду (1) и поиск начального приближения описаны в примере 3.17, а именно преобразуем систему к виду (3.24) так, чтобы выполнялось условие сходимости:

x_1=\sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}}=\varphi_1(x),\qquad x_2=\sqrt{x_1+3\lg x_1}= \varphi_2(x).

Найдем частные производные:

Здесь принято \lg e\cong 0,\!43429. Далее воспользуемся методикой решения задачи.

1. Для выбора начального приближения найдем координаты точек пересечения кривых, соответствующих первому и второму уравнениям (рис. 3.17).

Зададим начальное приближение x^{(0)}= (3,\!5;\, 2,\!2)^T. В поставленной задаче \varepsilon=0,\!001.

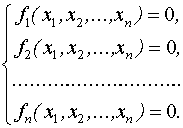
2, 3. Выполним расчеты по формулам (3.30):

а результаты поместим в табл. 3.18.

Найдено приближенное решение x_{\ast}\cong (3,\!4863;\, 2,\!2613)^T. При этом f_1(x_{\ast})=-0,\!006425,~ f_2(x_{\ast})= 0,\!000007.

**4. Метод градиента (метод скорейшего спуска)**

Пусть имеется система нелинейных уравнений:

(5.13)

Систему (5.13) удобнее записать в матричном виде:

Image227(5.14)

где - вектор – функция; Image229    - вектор – аргумент.

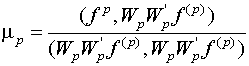
Решение системы (5.14), как и для системы линейных уравнений (см. п. 3.8), будем искать в виде

Image230 (5.15)

Здесь Image231и Image232- векторы неизвестных на *p* и *p****+***1 шагах итераций;

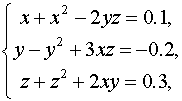
*f(p) = f*(*x(p)*) - вектор невязок на *p*-ом шаге;

*=W****’****p = WТp* – транспонированная матрица Якоби на *p*– ом шаге;

;

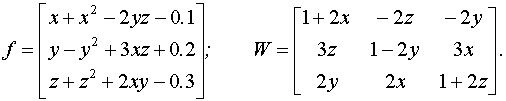
.

**Пример 5.2**. Методом градиента вычислим приближенно корни системы

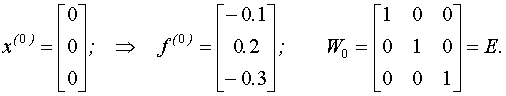


расположенные в окрестности начала координат.

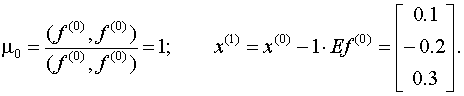
Имеем:



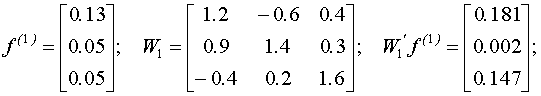
Выберем начальное приближение:

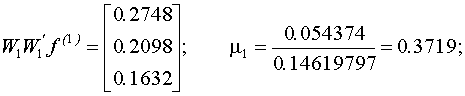


По вышеприведенным формулам найдем первое приближение:

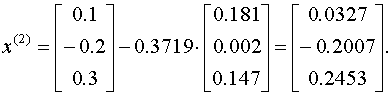


Аналогичным образом находим следующее приближение:

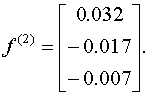




µ1=



Ограничимся двумя итерациями (шагами), и оценим невязку:



***Замечания***

* + Как видно из примера, решение достаточно быстро сходится, невязка быстро убывает.
  + При решении системы нелинейных уравнений методом градиента матрицу Якоби необходимо пересчитывать на каждом шаге (итерации).

**5.Метод Ньютона-Рафсона**

Математической основой метода является линеаризация функций F1, F2, Fn (левых частей уравнений, образующих [систему](http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/Source/NumMethods/Sys_non-lin_eq.html#sys_nonlin)) путем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки начального приближения к решению и пренебрежением всеми членами ряда кроме линейных относительно приращений переменных.

Рассмотрим метод на примере системы двух уравнений с двумя неизвестными:

EqnMNK001

Линеаризуем функции *F*1*, F*2 путем разложения в ряд Тейлора вблизи некоторой точки (начального приближения) и пренебрежения всеми членами ряда, кроме линейных, относительно приращений переменных.

Вспомним, что для функции одной переменной разложение в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки x0 имеет следующий вид:

teilor001

после пренебрежения всеми членами, кроме линейного:

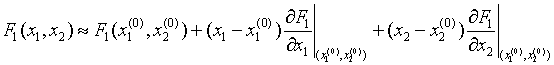
EqnMNK003

Для функции нескольких переменных разложение проводится аналогично.

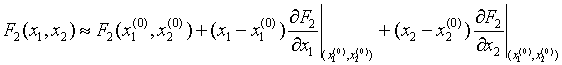
Выберем для поиска решения системы уравнений некоторое начальное приближение

EqnMNK004

Запишем для функции *F*1 2-х переменных линейную часть разложения в ряд Тейлора в окрестности выбранной точки



для второго уравнения, аналогично

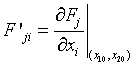


Если значения переменных *x*1 и *x*2 являются решением, то оба уравнения системы должны обратиться в ноль, поэтому полученные разложения приравниваем нулю.

Для краткости записи введем следующие обозначения:

EqnMNK008

 - приращение *i*-ой переменной



- значение первой частной производной функции *F*j по переменной *xi* при значении переменных

EqnMNK010

img009

 – значение  *j*-ой функции при соответствующих значениях переменных, то есть невязка *j*‑го уравнения.

Получим систему линейных уравнений 2 x 2 относительно приращения переменных

EqnMNK013

Или, в матричной форме,

EqnMNK014

EqnMNK015

где матрица значений частных производных называется матрицей Якоби (или *якобианом*). Решение этой системы дает вектор поправок к начальному приближению.

Сложение его с вектором начального приближения дает новые значения переменных.

EqnMNK016

Итерационная процедура далее продолжается аналогично.

Таким образом, процедура решения выглядит следующим образом:

1. Выбирается начальное приближение, система приводится к нормальному виду, в аналитическом виде находятся частные производные правых частей уравнений системы по всем переменным.

2. Рассчитывается матрица Якоби значений частных производных в точке начального приближения.

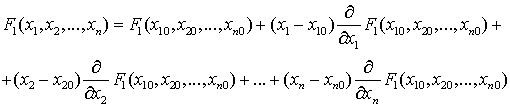
3. Решается система линейных уравнений относительно приращений переменных.

4. К вектору начального приближения прибавляется вектор приращений

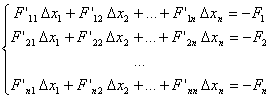
5. Проверяется условие сходимости и, если оно не достигнуто, то процедура повторяется с п. 2.

Метод легко обобщается на систему уравнений любой размерности.

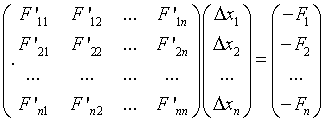
Для функции *F*1  *n* переменных линейная часть разложения в ряд Тейлора в окрестности точки pointзаписывается так



После разложения всех уравнений системы и используя введенные ранее обозначения, после преобразования получим систему линейных уравнений порядка  *n* относительно приращения переменных Δ*xi*

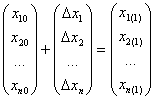


Или, в матричной форме,



В сокращенном виде можно записать так - (*F'*)(Δ*x*) *= -*(*F*), где матрица значений частных производных – (*F'*)– называется *матрицей Якоби* или *якобианом* системы уравнений.

Решение этой системы дает вектор поправок к начальному приближению. Сложение его с вектором начального приближения дает новые, уточненные значения переменных.



Частные производные, необходимые для расчета *матрицы Якоби*, можно рассчитать аналитически или же, если это невозможно или затруднительно, получать по формулам приближенного дифференцирования, например, как отношение приращения функции к приращению аргумента

image135,

где *эпсилон* – достаточно малое число.

**Контрольные вопросы к лекции №4**

1. Как найти начальное приближение: а) для метода Ньютона; б) для метода градиента?
2. В методе скорейшего спуска вычисляется Якобиан (матрица Якоби). Чем отличается Якобиан, вычисленный для СЛАУ, от Якобиана, вычисленного для нелинейной системы уравнений?
3. Каков критерий остановки итерационного процесса при решении системы нелинейных уравнений: а) методом Ньютона; б) методом скорейшего спуска?

**Раздел 3. Интерполирование, дифференцирование, интегрирование функций и приближенные вычисления дифференциальных уравнений**

**Тема 5. Интерполирование функций**

Лекция №5

**Тема лекции: Интерполирование функций**

**Содержание лекции №5**

1. Интерполяционный полином Лагранжа.

2. Интерполяционная формула Ньютона.

**Основная и дополнительная литература к лекции №5**:

а) основная: 1,2,3;

б) дополнительная: 4 -8;

в) интернет-ресурсы: 2-4,10-13,14-16.

**1. Интерполяционный полином Лагранжа**

Пусть дана таблица значений

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **х** | *х1* | *х2* | *х3* | *............* | *хп* |
| **у** | *у1* | *у2* | *у3* | *............* | *уп* |

Требуется составить полином (функцию) *y = f (x)* степени *m ≤ n – 1*, который принимал бы заданные значения *yi* при соответствующих значениях *xi* : *yi = f (xi) (i = 1, 2, 3, ………n).* Иными словами график функции должен проходить через заданные точки *M (xi; yi)*

Данная задача выполнима при использовании интерполяционного полинома Лагранжа:

**** +**

**** +......**

**....+ ** (1)**

или

** (2)**

где - вспомогательная функция *п*-й степени, в которой *xi –* заданные табличные значения аргумента.

**Пример 2.1**

Составить полином Лагранжа, удовлетворяющий таблице1 значений

Таблица 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **х** | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **у** | 2 | 3 | 4 | 5 |

**Решение.**

Вспомогательная функция 

Вычислим последовательно при данных значениях х:

= (х - 2)(х - 3)(х - 4)+(х - 1)(х - 3)(х - 4)+(х - 1)(х - 2)(х - 4)+(х - 1)(х - 2)(х - 3);

, , , .

Тогда по формуле (1)

=

= *х* *+* 1

Таким образом, в данном случае в качестве интерполяционного полинома найдена линейная функция *f (x) = х +* 1.

**2. Интерполяционная формула Ньютона**

Пусть *у0, у1, у2,*....... – значения некоторой функции *y = f (x)*, соответствующие равноотстоящим значениям аргументам *х0, х1, х2,* ....... (т.е. *хk+1 – xk =* Δ*x = const* ).

Введем обозначения:

Δ*у0 = у1 – у0,* Δ*у1 = у2 – у1,* Δ*у2 = у3 – у2, ......... ,* Δ*уп-1 = уп – уп-1*  - разности первого порядка данной функции;

Δ2*у0 =*Δ*у1 –*Δ*у0,* Δ2*у1 =*Δ*у2 –*Δ*у1, ............. –* разности второго порядка

........................................................................

Δ*п+1у0 =*Δ*пу1 –*Δ*пу0,* Δ*п+1у1 =*Δ*пу2 –*Δ*пу1, ............. –* разности (*п+*1)- го порядка

Производя последовательные подстановки, получим:

Δ2*у0 = у2 -2у1 + у0 ,* Δ3*у0 = у3 -3у2 +3 у1 – у0 , ........*

Подобным же образом получаем:

*у1 = у0* + Δ*у0 , у2 = у0 + 2*Δ*у0 +* Δ2*у0 , у3 = у0 + 3* Δ*у0 + 3*Δ2*у0 +* Δ3*у0 , ......*

 **(3)**

Запишем таблицу разностей:

***х0 у0***

Δ *у0*

***х1 у1*** Δ2*у0*

Δ *у1*Δ3*у0*

***х2 у2*** Δ2*у1*Δ4*у0*

Δ *у2* Δ3*у1*

***х3 у3*** Δ2*у2*

Δ *у3*

***х4 у4***

***....................................................***

Если в формуле (3) положить, что *п* – не только целое и положительное число, а может быть любым *п = t*, то получим интерполяционную формулу Ньютона

**** (4)**

Мы получили такую функцию от *t*, которая обращается при *t* = 0 в *у0*, при *t* = 1 в *у1*, при *t* = 2 в *у2* и т. д. Поскольку последующее значение аргумента *х* при постоянном шаге *h* определяется формулой *xn = x0 + nh*, то . Тогда, полагая *x = x0 + th ,*  приведем формулу (3) к виду

**** (3\*)**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **х** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **у** | 3 | 7 | 13 | 21 | 31 | 43 | 57 |

**Пример 2.2:**

Из таблицы 2:

Найти значение *у* при *х =* 3,1, пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, а также саму интерполяционную функцию.

**Решение.** Составим таблицу разностей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **х** | **у** | **Δу** | **Δ2 у** | **Δ3 у** |
| **1**  **2**  **3**  **4**  **5**  **6**  **7** | **3**  **7**  **13**  **21**  **31**  **43**  **57** | 4  6  8  10  12  14 | 2  2  2  2  2 | 0  0  0  0 |

Здесь *х0* = 3, *х* = 3,1, *h* = 1. (выбирается из таблицы 2 ближайшее число к 3.1, и шаг то же).

Тогда 

Интерполяционная формула Ньютона (4) для этого случая: ******

Следовательно ***,*** т.е. при *х =* 3,1 *у =* 13,71

Интерполяционная функция Ньютона (3\*) ******

**Контрольные вопросы к лекции №5**

1. Интерполяционный полином Лагранжа.

2. Интерполяционная формула Ньютона.

**Контрольные упражнения к лекции №5**

1. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, найти уравнение параболы проходящей через точки (2; 0), (4; 3), (6; 5), (8; 4), (10; 1).

*(Ответ: у = (х4 - 26х3 + 220х2 – 664х + 640))*

1. Даны точки (0; 3), (2; 1), (3; 5), (4; 7). Используя интерполяционную формулу Лагранжа, составить уравнение функции, принимающей указанные значения при заданных значениях аргумента.

*(Ответ: у = ( - 2х3 -15х2 + 25х -9))*

1. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, построить функцию, принимающую значения заданные таблицей.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **х** | 1 | 3 | 4 | 6 |
| **у** | -7 | 5 | 8 | 14 |

*(Ответ: у = ( х3 -13х2 + 69х -92))*

1. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, построить функцию, график которой проходит через точки (2; 3), (4; 7), (5; 9), (10; 19).

*(Ответ: у =2х - 1)*

1. Даны десятичные логарифмы чисел:

*lg 2,0 = 0,30103, lg 2,1 = 0,32222, lg 2,2 = 0,34242,*

*lg 2,3 = 0,36173, lg 2,4 = 0,38021, lg 2,5 = 0,39794.*

Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, найти  *lg 2,03.*

*(Ответ: lg 2,03 = 0,30750)*

1. Найти интерполяционный полином Ньютона для функции *y = f (x),* если известныее значения *f (1) = 6, f (3) = 24, f (4) =45.*

*(Ответ: у = 4х2 - 7х+ 9)*

1. Найти интерполяционный полином Ньютона для функции  *f(x)= 2x*  и ее значениям в точках *х0 = -1, х1 = 0, х2 = 1, х3 = 2, х4 = 3* ивычислить *f(-0,5)* и *f(2,5).*

*(Ответ: у =8 + 4(х - 3) + (х – 3)(х - 2)+ (х – 3)(х - 2)(х – 1) +(х – 3)(х - 2)(х – 1)х, f(-0,5)= 0,700, f(2,5)= 5,658.)*

1. Составить интерполяционную формулу Ньютона по данным таблицы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **х** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **у** | 1 | 4 | 15 | 40 | 85 |

*(Ответ: у = х3 + х2 + х + 1)*

**Раздел 3. Интерполирование, дифференцирование, интегрирование функций и приближенные вычисления дифференциальных уравнений**

**Тема 6. Численное дифференцирование и интегрирование функций**

Лекция №6

**Тема лекции: Численное интегрирование функций**

**Содержание лекции №6**

1. Метод прямоугольников.

2. Метод трапеций.

3. Метод Симпсона (парабол).

**Основная и дополнительная литература к лекции №6**:

а) основная: 1,2,3;

б) дополнительная: 4 -8;

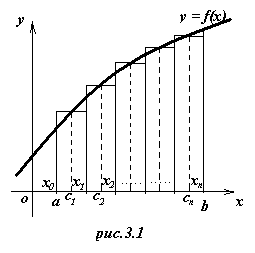
в) интернет-ресурсы: 2-4,10-13,14-16.

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ**

Пусть требуется найти определенный интеграл  от непрерывной функции *f(x).* Если можно найти первообразную *F(x)* функции *f(x)*, то интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница. Но не всегда первообразная функции выражается через элементарные функции. В этих и других случаях используют приближенные формулы, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Наиболее употребимые формулы – формула прямоугольников, формула трапеции и формула парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

**1. Метод прямоугольников**

 Пусть на отрезке [a ; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x).* Требуется вычислить интеграл , численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции на *п* равных частей длины . тогда *xi = x0+hi.* В середине  каждого такого отрезка построим ординату  графика функции *у = f(x)*. Приняв эту ординату за высоту построим прямоугольник с площадью

. Тогда сумма площадей всех *п* прямоугольников (при достаточно большом *п*) дает площадь приближенно равную площади трапеции, т.е.



т.е.

** - формула прямоугольников (1)**

Абсолютная погрешность метода определяется неравенством:

** (2)**

где  **(3)**

**Пример 1:** Вычислить интеграл  при *п* = 4, используя метод прямоугольников.

**Решение.**

**=**

**=** 

т.к. **** и :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

 где 

***,*** , 

Следовательно:

** -** по формуле прямоугольников

**Пример 2:**

Зная, что погрешность метода прямоугольников при вычислении интеграла  составляет 0,125, определить число разбиений *п.*

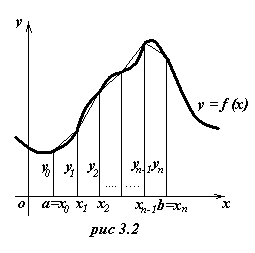
**Решение.** Используя формулу **(2)** получим 

Умножим правую и левую части неравенства на дробь , тогда .

т.е  или 

**2. Метод трапеций**

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Пусть на отрезке [a; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x).* Требуется вычислить интеграл , численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции на *п* равных частей длины . тогда *xi = x0+hi, yi = f (xi).*

Так как площадь криволинейной трапеции приблизительно равна сумме площадей трапеций *Si*, высота каждой из которых равна *h,* то:



****

Абсолютная погрешность метода (аналогично методу прямоугольников) составляет:

**** где ** (4)**

тогда ** - формула трапеций. (5)**

**Пример 3:** Вычислить интеграл  при *п* = 4, используя метод трапеций.

**Решение.** По формуле трапеций:

**,** т.к. **,** , то

**,**

**,**

**,**

**,**

.

Тогда , , , , .

Найдем погрешность:

 где 

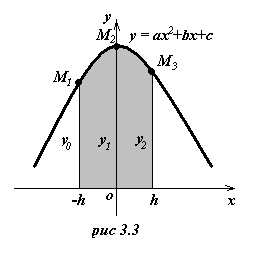
***,*** , 

Следовательно

**-** по формуле трапеций

**3. Метод парабол (Метод Симпсона)**

Если заменить график функции на каждом отрезке не отрезками прямых, как в методах прямоугольников и трапеций, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного значения интеграла .

Предварительно найдем вспомогательную площадь *S* криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой *y = ax2 + bx + c*, прямыми *x = -h, x = h*  и отрезком [*-h; h*].

Пусть парабола проходит через точки *М1*(*-h; у0*),

*М2*(*0; у1*) и *М3*(*h; у2*).

 **(6)**

тогда полученная площадь:

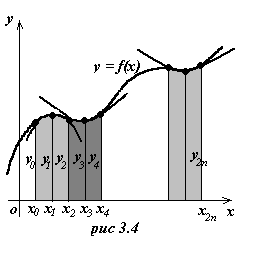
** (7)**

Выразим полученное значение через  *у0,  у1* и  *у2.* Используя формулы (6) получим *c = y1*, . Подставляя полученные значения в (7) получим:

 -**формула Симпсона** **(8)**

**Вывод формулы парабол (Симпсона).**

Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная функциями *y = f (x), x = a, x = b, y = 0.*



1. Разобьем отрезок [a; b] на *2п* равных частей. Получим отрезки длиной  **(9)**
2. В точках деления вычислим значения функции

*y = f (x)*: *у0, у1, у2, ......, у2п-2, у2п-1, у2п.*

1. Заменим каждую пару соседних криволинейных трапеций параболическими трапециями с основаниями, равными *2h.*

На отрезке [*x0; x2*] парабола проходит через точки (*х0; у0*), (*х1; у1*), (*х2; у2*).

Используя формулу (8) получим 

Аналогично на отрезке [*x2; x4*]:  и т. д. до



Следовательно:

=



Учитывая погрешность вычислений и , получим формулу Симпсона

 **(10)**

Абсолютная погрешность метода оценивается соотношением:

**** где ** (11)**

**Пример 4:**

Вычислить интеграл , используя метод парабол при *п = 4.*

**Решение.**

Количество разбиений *2п = 8, *, *f (x)= x3*

Составим таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***х*** | ***y0 , y8*** | ***у****четное* | ***у****нечетное* |
| *x0 =0* | *y0 = f(0) = 03 = 0* |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *x8 = 2* | *y8 = f(2) = 23 = 8* |  |  |

Рассмотрим погрешность метода:

***=*** *0* (Доказать самостоятельно).

По формуле Симпсона получаем:

=

**Точное решение:** =

**Контрольные вопросы к лекции №6**

1. Метод прямоугольников.

2. Метод трапеций.

3. Метод Симпсона (парабол).

**Контрольные упражнения к лекции №6**

1. По формуле прямоугольников вычислить , разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.

*(Ответ: )*

1. По формуле трапеций вычислить , разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.

*(Ответ: )*

1. По формуле Симпсона вычислить , с точностью до 0,001

*(Ответ: )*

1. По формуле Симпсона вычислить , с точностью до 0,0001

*(Ответ: п = 10, )*

1. По формуле Симпсона вычислить , с точностью до 0,01

*(Ответ: п = 5, )*

1. По формуле Симпсона вычислить , с точностью до 0,01

*(Ответ: п = 4, )*

1. По формуле трапеций вычислить , с точностью до 0,01

*(Ответ: п = 4, )*

1. По формуле трапеций вычислить , с точностью до 0,01

*(Ответ: п = 6, )*

**Раздел 3. Интерполирование, дифференцирование, интегрирование функций и приближенные вычисления дифференциальных уравнений**

**Тема 7. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений**

Лекция №7

**Тема лекции: Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений**

**Содержание лекции №7**

1. Метод Эйлера.

2. Метод Рунге-Кутта.

**Основная и дополнительная литература к лекции №7**:

а) основная: 1,2,3;

б) дополнительная: 4 -8;

в) интернет-ресурсы: 2-4,6,7,10-13,14-16.

**1. Метод Эйлера**

Пусть требуется решить **задачу Коши**: найти решение дифференциального уравнения

****  (1)**

удовлетворяющее начальному условию *у(х0) = у0*.

При численном решении дифференциального уравнения (1) задача ставится следующим образом: в точках *х0 , х0 , х1 , х2 ,...., хп* найти приближения для значений точного решения *у(хк)*

Разность  называется **шагом сетки**. Во многих случаях величину  принимают постоянной. Пусть =*h*, тогда

*xk = x0 +kh* где **(2)**

Метод Эйлера основан на непосредственной замене производной разностным отношением по приближенной формуле

******, где  **(3)**

Приближенное значение *ук*  в точке *xk = x0 +kh*  вычисляется по формуле:

- **формула Эйлера (4)**

**Пример 1:** Методом Эйлера найти значения решения уравнения ******, для которого *у(1) = 1,* в пяти точках отрезка [*1; 1,5*], приняв *h = 0,1.*

**Решение.** По формуле (2) находим точки *х0 = 1, х1 = 1,1, х2 = 1,2, х3 = 1,3, х4 = 1,4, х5 = 1,5.* Значения искомой функции  *у = у(х),* удовлетворяющей условиям данной задачи Коши, вычисляем по формуле (4). Результаты вычислений занесем в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***k*** | ***xk*** | ***yk*** | ***2xk*** | ***f(xk , yk ) = 2xk - yk*** | ***hf(xk , yk ) = 0,1(2xk - yk)*** | ***yk+1 = yk + hf(xk , yk )*** |
| **0** | 1,0 | 1,0000 | 2,0 | 1,0000 | 0,1000 | 1,1000 |
| **1** | 1,1 | 1,1000 | 2,2 | 1,1000 | 0,1100 | 1,2100 |
| **2** | 1,2 | 1,2100 | 2,4 | 1,1900 | 0,1190 | 1,3290 |
| **3** | 1,3 | 1,3290 | 2,6 | 1,2710 | 0,1271 | 1,4561 |
| **4** | 1,4 | 1,4561 | 2,8 | 1,3439 | 0,1344 | 1,5905 |
| **5** | 1,5 | 1,5905 | 3,0 | 1,4095 | 0,1410 | 1,7315 |

**2. Метод Рунге – Кутта**

Один из наиболее употребляемых методов повышенной точности.

Пусть функция *у* определяется дифференциальным уравнением  с начальным условием *у(х0) = у0*. При численном интегрировании такого уравнения по методу Рунге – Кутта определяются четыре числа:

 **(5)**

Если положить , то можно доказать, что

**. (6)**

Получаем следующую схему вычислений:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***x*** | ***y*** | ***ki*** | ***Δy*** |
| *x0* | *y0* | *k1* |  |
|  |  | *k2* |
|  |  | *k3* |
| *x0 + h* | *y0 + k3* | *k4* |
| *x1* | *y1 =y0 +Δy0* | *k1* |  |
|  |  | *k2* |
|  |  | *k3* |
| *x1 + h* | *y1 + k3* | *k4* |
| *x2* | *y2 =y1 +Δy1* | *k1* |  |
|  |  | *k2* |
|  |  | *k3* |
| *x2 + h* | *y2 + k3* | *k4* |
| .............. | ............. | .............. | ............... |

**Пример 2:** Составь таблицу значений функции *у*, определяемой уравнением , при начальном условии *у(0) = 1, 0 ≤ х ≤ 1* при *h = 0,2* .

**Решение.**

Используя формулы (5) найдем числа:



Отсюда 

Таким образом *у1 = 1 + 0,1832 = 1,1832* при *х = 0,2*. По этой же схеме находим *у2* и т.д. процесс вычисления ведем по схеме:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***x*** | ***y*** | ***ki*** | ***Δy*** |
| *x0 = 0* | *y0 =1* | *k1 = 0,2* | = 0,1832 |
| *= 0,1* | *=1,1* | *k2 = 0,1838* |
| *=0,1* | *1,0918* | *k3 = 0,1817* |
| *x0 + h = 0,2* | *y0 + k3 = 1,1817* | *k4 = 0,1686* |
| *x1 = 0,2* | *y1 =y0 +Δy0 = 1,1832* | *k1 = 0,1690* | = 0,1584 |
| *= 0,3* | *= 1,2677* | *k2 = 0,1589* |
| *= 0,3* | *= 1,2626* | *k3 = 0,1575* |
| *x1 + h = 0,4* | *y1 + k3 = 1,3407* | *k4 = 0,1488* |
| *x2* | *y2 =y1 +Δy1* | *k1* |  |
| .............. | ............. | .............. | ............... |

**Контрольные вопросы к лекции №7**

1. Метод Эйлера.

2. Метод Рунге-Кутта.

**Контрольные упражнения к лекции №7**

1. Найти, используя метод Эйлера, значения функции *у*, определяемой дифференциальным уравнением , при начальном условии *у(0) = 1*, принимая *h = 0,1*. Ограничиваясь отысканием первых четырех значений *у*.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*** | *0* | *0,1* | *0,2* | *0,3* | *0,4* |
| ***у*** | *1* | *1,1* | *1,18* | *1,25* | *1,31* |

*Ответ:*

1. Найти по методу Эйлера четыре значения функции *у*, определяемой уравнением , при начальном условии *у(0) = 1*, принимая *h = 0,1*.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*** | *0* | *0,1* | *0,2* | *0,3* | *0,4* |
| ***у*** | *1* | *1,1* | *1,22* | *1,36* | *1,52* |

*Ответ:*

1. Найти по методу Эйлера три значения функции *у*, определяемой уравнением , при начальном условии *у(0) = 1*, принимая *h = 0,1*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*** | *0* | *0,1* | *0,2* | *0,3* |
| ***у*** | *1* | *1,2* | *1,45* | *1,78* |

*Ответ:*

1. Найти по методу Эйлера четыре значения функции *у*, определяемой уравнением , при начальном условии *у(0) = 0*, принимая *h = 0,1*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*** | *0,1* | *0,2* | *0,3* | *0,4* |
| ***у*** | *0* | *0,001* | *0,005* | *0,014* |

*Ответ:*

1. Найти, используя метод Эйлера, значения функции *у*, определяемой дифференциальным уравнением , при начальном условии *у(2) = 4*, принимая *h = 0,1*. Ограничиваясь отысканием первых четырех значений *у*.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*** | *0* | *0,1* | *0,2* | *0,3* | *0,4* |
| ***у*** | *1* | *1,1* | *1,18* | *1,25* | *1,31* |

*Ответ:*

1. Найти методом Эйлера численной решение уравнения  на отрезке [0; 1], при начальном условии *у(0) = 1*, принимая *h = 0,2*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*** | *0* | *0,2* | *0,4* | *0,6* | *0,8* | *1,0* |
| ***у*** | *1* | *1,1* | *1,18* | *1,24* | *1,27* | *1,27* |

*Ответ:*

1. По методу Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение  на промежутке [1; 2], при начальном условии *у(1) = 0*, принимая *h = 0,1.* В первых пяти точках.

*Ответ:*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*** | *0* | *0,1* | *0,2* | *0,3* | *0,4* |
| ***у*** | *-0,1158* | *-0,1501* | *-0,1925* | *-0,2397* | *-0,2944* |

1. По методу Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение  на промежутке [0; 1], при начальном условии *у(0) = 1*, принимая *h = 0,1.* Вычисление вести с тремя верными знаками.

*Ответ:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*** | *0* | *0,1* | *0,2* | *0,3* | *0,4* | *0,5* | *0,6* | *0,7* | *0,8* | *0,9* | *1,0* |
| ***у*** | *-1* | *-0,975* | *-0,949* | *-0,921* | *-0,888* | *-0,842* | *-0,802* | *-0,744* | *-0,675* | *-0,593* | *-0,495* |

1. По методу Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение  на промежутке [0; 1], при начальном условии *у(0) = 1*, принимая *h = 0,1.* Вычисление вести с двумя верными знаками.

*Ответ:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*** | *0* | *0,1* | *0,2* | *0,3* | *0,4* | *0,5* | *0,6* | *0,7* | *0,8* | *0,9* | *1,0* |
| ***у*** | *1* | *1,05* | *1,12* | *1,20* | *1,29* | *1,39* | *1,50* | *1,62* | *1,75* | *1,89* | *2,03* |

**Раздел 4. Статистическое моделирование и обработка экспериментальных данных**

**Тема 8. Моделирование случайных чисел на ПК**

Лекция №8

**Тема лекции: Моделирование случайных чисел на ПК**

**Содержание лекции №8**

1.Генерация псевдослучайных чисел

2.Моделирование случайной величины. Использование Excel для моделирования случайной величины.

**Основная и дополнительная литература к лекции №8**:

а) основная: 2;

б) дополнительная: 4 -8;

в) интернет-ресурсы: 1-5,10-12,14-16.

**1.Генерация псевдослучайных чисел**

Довольно часто программисты в своей работе встречаются с необходимостью работать со случайными числами. Чаще всего случайные числа требуются в задачах моделирования, численного анализа и тестирования, но существует и множество других весьма специфических задач.

Конечно, во всех современных языках программирования есть функция random или её аналоги. Эти функции чаще всего дают действительно хорошие псевдослучайные числа, но мне всегда было интересно, как эти функции работают.  
В этом топике я постараюсь объяснить, как работает линейный конгруэнтный метод (который чаще всего используется в функции random), и метод получения случайных чисел с помощью полиномиального счётчика (который часто используется для тестирования аппаратуры).

**Введение**

Сразу стоит сказать, что есть смысл генерировать случайные числа только с равномерным законом распределения, т.к. все остальные распределения можно получить из равномерного путём преобразований, известных из теории вероятности.  
Для тех, кто забыл или пока не изучал теорию вероятности, напомню, что в равномерно распределённой последовательности нулей и единиц нули в среднем(!) будут встречаться в 50% случаев. Но это вовсе не значит, что в последовательности из 1000 цифр будет ровно 500 нулей. Более того, в последовательности из 1000 цифр может быть 999 нулей, и вероятность того, что тысячный элемент будет равен нулю по-прежнему остаётся равной 0.5. На первый взгляд это кажется парадоксальным, но важно понимать, что все последовательности равновероятны. Если же мы будем рассматривать достаточно большую совокупность таких последовательностей, то в среднем(!) в каждой из них будет 500 нулей.

Немного вспомнив теорию, мы перейдём к истории. В докомпьютерные времена случайные числа получали, вытаскивая разноцветные мячи из мешков, вытягивая карты, бросая кости. Понятно, что серьёзные исследования так проводить было нельзя, поэтому в 1927 года Типпетт опубликовал первую таблицу случайных чисел. Чуть позже люди попытались как-то автоматизировать этот процесс. Начали появляться машины, генерирующие случайные числа. Сейчас такие устройства тоже используются и называются источниками (генераторами) энтропии. Стоит заметить, что только такие устройства могут давать по-настоящему случайные числа. Но, к сожалению, генераторы энтропии довольно дороги, и не представляется возможным установить их в каждый ПК. Именно поэтому и возникла необходимость в алгоритмах получения случайных чисел.

Первая попытка получения ПСП

Некоторые люди думают, что получать случайные числа легко. По их мнению для этого достаточно делать случайные сложные математические действия над исходным числом. Если мы откроем второй том всем известного Кнута, то узнаем, что в 1959 Кнут тоже пробовал построить генератор, основанный на такой идее. Его алгоритм выглядел так:

К1. [Выбрать число итераций.] Присвоить Y наибольшую значащую цифру Х. (Мы выполним шаги К2-К13 точно Y+1 раз, т. е. применим рандомизированные преобразования случайное число раз.)

К2. [Выбрать случайный шаг] Присвоить следующую наибольшую значащую цифру X. Переходим к шагу К(3 + Z), т. е. к случайно выбранному шагу в программе.

КЗ. [Обеспечить > 5 х 109] Если X < 5000000000, присвоить X значение X + 5000000000.

К4. [Средина квадрата.] Заменить X серединой квадрата X.

К5. [Умножить.] Заменить X числом (1001001001 X) mod 1010.

К6. [Псевдодополнение.] Если X < 100000000, то присвоить X значение X + 9814055677; иначе присвоить X значение 1010- X.

К7. [Переставить половины.] Поменять местами пять младших по порядку знаков со старшими.

К8. [Умножить.] Выполнить шаг К5.

К9. [Уменьшить цифры.] Уменьшить каждую не равную нулю цифру десятичного представления числа X на единицу.

К10. [Модифицировать на 99999.] Если А' < 105, присвоить X значение — X 2 +99999; иначе присвоить X значение X — 99999.

К11. [Нормировать.] (На этом шаге А' не может быть равным нулю.) Если X <109, то умножить X на 10.

К12. [Модификация метода средин квадратов.] Заменить Х на средние 10 цифр числа Х(Х — 1).

К13. [Повторить?] Если Y > 0, уменьшить У на 1 и возвратиться к шагу К2. Если Y = 0, алгоритм завершен. Значение числа X, полученное на предыдущем шаге, и будет желаемым «случайным» значением.

Несмотря на кажущуюся сложность, этот алгоритм быстро сошёлся к числу 6065038420, которое через небольшое число шагов преобразовалось в себя же. Мораль этой истории в том, что нельзя использовать случайный алгоритм для получения случайных чисел.

Линейный конгруэнтный метод

В большинстве языков программирования именно этот метод используется в стандартной функции получения случайных чисел. Впервые этот метод был предложен Лехмером в 1949 году. Выбирается 4 числа:

1. Модуль m (m>0);
2. Множитель a (0<=a<m);
3. Приращение c (0<=c<m);
4. Начальное значение X0 (0<= X0<m)

Последовательность получается с использование следующей рекуррентной формулы: Xn+1=(a\* Xn+c) mod m.

Этот метод даёт действительно хорошие псевдослучайные числа, но, если взять числа m,a,c произвольно, то результат нас скорее всего разочарует. При m=7, X0=1, a=2, c=4 получится следующая последовательность: 1,6,2,1,6,2,1,…

Очевидно, что эта последовательность не совсем подходит под определение случайной. Тем не менее, этот провал позволил нам сделать два важных вывода:

1. Числа m,a,c, X0 не должны быть случайными;
2. Линейный конгруэнтный метод даёт нам повторяющиеся последовательности.

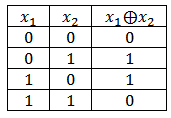
На самом деле любая функция, отображающая конечное множество X в X, будет давать циклически повторяемый значения. Т.о. наша задача состоит в том, чтобы максимально удлинить уникальную часть последовательности (кстати, очевидно, что длина уникальной части не может быть больше m).  
Не вдаваясь в подробности доказательств, скажем, что период последовательности будет равен m только при выполнении следующих трех условий:

1. Числа c и m взаимно простые;
2. a-1 кратно p для каждого простого p, являющегося делителем m;
3. Если m кратно 4, то и a-1 должно быть кратно 4.

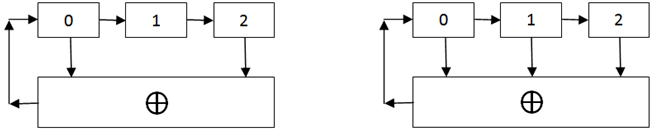
В завершении рассказа о линейном конгруэнтном методе надо сказать, что последовательности, получаемые с его помощью, хоть и являются в достаточном смысле случайными, тем не менее не являются криптографически стойкими. Т.к. зная 4 подряд идущих числа, криптоаналитик может составить систему уравнений, из которых можно найти a,c,m.

Получение псевдослучайных чисел на основе полиномиального счетчика (сдвигового регистра).

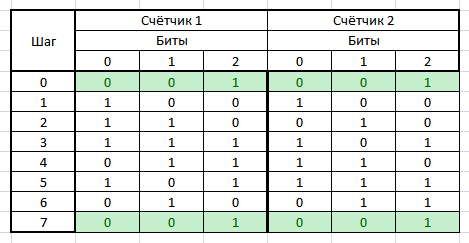
В основе алгоритма, который мы сейчас рассмотрим, лежит операция исключающего ИЛИ (сумма по модулю два). На всякий случай, напомню, как выглядит таблица истинности для данной функции:



Схемы, представленные на рисунке ниже, являются простейшими полиномиальными счётчиками. Нулевой бит в таких схемах вычисляется на основе функции исключающего ИЛИ, а все остальные биты получаются простым сдвигом. Разряды с которых сигнал идёт на исключающее ИЛИ называются отводами.



Рассмотрим, как будут изменяться значения в этих регистрах при начальном значении 001:



Оба регистра начинают работу с одного и того же значения, но потом значения, генерируемые регистрами начинают быстро расходиться. Но через 6 шагов, оба регистра возвращаются в исходное состояние.

Легко показать, что оба этих регистра сгенерировали максимально длинную последовательность, которая содержит все комбинации, кроме нулевой. Т.е. при разрядности регистра m, можно получить последовательность длинной 2m-1.  
Полиномиальный счётчик любой разрядности имеет ряд комбинаций отводов, которые обеспечат последовательность максимальной длины, использование неверных комбинаций приведёт к генерации коротких последовательностей. Отдельная и довольно сложная задача – поиск этих комбинаций отводов.

Стоит заметить, что эти комбинации не всегда уникальны. К примеру, для 10-битного счётчика их существует две: [6;9] и [2;9], для шестиразрядного счётчика таких комбинаций двадцать восемь.

Для того, чтобы найти эти комбинации, необходимо представить счётчик в виде полинома. Счётчики из примера будут иметь следующий вид:

x2 XOR 1 и x2 XOR x XOR 1.

Из теории известно, что необходимым и достаточным условием генерации полной последовательности является примитивность характеристического полинома. Это значит, что:

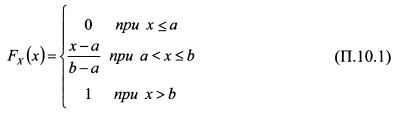
* Характеристический полином нельзя представить в виде произведения полиномов более низкой степени;
* Характеристический полином является делителем полинома zδ XOR 1, при(δ=2m-1, и не является делителем при любых других значениях δ<2m-1.

Преимуществами полиномиального счётчика является простота, как программной, так и аппаратной реализации, скорость работы и криптографическая стойкость.

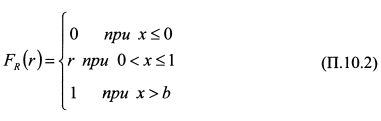
**2. Моделирование случайной величины. Использование Excel для моделирования случайной величины**

Для моделирования искомой случайной величины используют случайную величину, которая принимает любые значения на отрезке [0,1] с равной вероятностью. На практике выбранное значение случайной величины будет иметь бесконечное число десятичных знаков. Поэтому ограничиваются только определенным количеством десятичных знаков. В связи с этим распределение случайной величины не строго равномерно. Следует также подчеркнуть, что получаемые значения случайной величины представляют собой "псевдослучайные" числа, поскольку они генерируются на основе определенного алгоритма. Данный алгоритм с определенной цикличностью повторяет одинаковую последовательность чисел. Если циклы относительно коротки, то получаемые значения не будут независимыми. Это может исказить оценку VaR, поскольку распределение стоимости портфеля окажется не полным.

Функция распределения случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [а, b], имеет вид:

 (1)

Обозначим непрерывную равномерно распределенную на отрезке [0,1] случайную величину через R. Тогда, согласно выражению (1), ее функция распределения равна:

 (2)

Отсюда видно, что вероятность попадания случайной величины на любой интервал отрезка [0,1] равна длине этого интервала:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг (3)

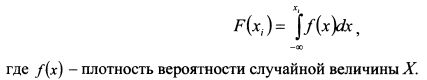
Для моделирования непрерывной случайной величины часто используют метод обратных функций. Суть его сводится к следующему. Искомая случайная величина X имеет функцию распределения F(x). С помощью генератора случайных чисел получают некоторое число г случайной величины R. Это означает, что в данном эксперименте значение *ri* равно значению функции распределения величины X. Поэтому можно записать:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Из уравнения (3) находим значение xi, которое искомая случайная величина X в данном испытании приняла с вероятностью *ri*:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

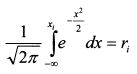
Функция распределения и плотность вероятности случайной величины связаны соотношением:



Поэтому вместо уравнения (П.10.3) можно решить уравнение:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг (4)

С помощью рассмотренного метода наиболее часто моделируют нормально распределенную величину. Плотность стандартной нормально распределенной величины равна: Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг. Тогда выражение (4) принимает вид:



Отсюда:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг (5)

Пример 1.

В результате испытания равномерно распределенная на отрезке [0,1] случайная величина приняла значение 0,492. Определить соответствующее ей значение стандартной нормальной случайной величины.

Решение.

На основе равенства (5) запишем:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

По таблице *стандартного нормального распределения (это справочник)* находим:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Или Значение стандартной нормально распределенной случайной величины вместо таблиц можно определить с помощью программы Excel. Найдем значение величины х1 из примера 1. Ответ получим в ячейке А1, поэтому активизируем ее. Открываем окно "Мастер функций". Курсором выбираем раздел "Статистические" и щелкаем мышью. В окне "Функция" выбираем курсором строку "НОРМСТОБР" и щелкаем кнопку ОК. В строке "Вероятность" печатаем цифру 0,492 и щелкаем кнопку ОК.

Если необходимо смоделировать возможные значения нормально распределенной величины с математическим ожиданием а и стандартным отклонением (корень из дисперсии) σ, то выражение (П.10.5) примет вид:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг (6)

Пример 2.

По данным примера 1 определить значения нормально распределенной величины с математическим ожиданием 10 и ско (дисперсией?) 2.

Решение. На основе равенства (П.10.6) запишем:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

По таблице стандартного нормального распределения находим:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

или

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Или Значение нормально распределенной случайной величины вместо таблиц можно определить с помощью программы Excel. Найдем значение величины х1 из примера 2. Ответ получим в ячейке А1, поэтому активизируем ее. Открываем окно "Мастер функций". Курсором выбираем раздел "Статистические" и щелкаем мышью. В окне "Функция" выбираем курсором строку "НОРМОБР" и щелкаем кнопку ОК. В строке "Вероятность" печатаем цифру 0,492, в строке "Среднее" - цифру 10, в строке "Стандартноеоткл" - цифру 2 и щелкаем кнопку ОК.

**Программа Excel позволяет моделировать равномерно распределенную случайную величину на отрезке [0, 1].** Для этого служит функция **СЛЧИС()**. Получим в ячейке А1 первое значение случайной величины. Для этого печатаем в ней формулу: =СЛЧИС() и нажимаем клавишу Enter. В ячейке появилось значение случайной величины. Следующее ее значение в данной ячейке можно получить, нажав клавишу F9.

**Для моделирования нормально распределенной случайной величины с некоторым средним значением а и стандартным отклонением σ служит функция НОРМОБР.** Пусть среднее значение нормально распределенной случайной величины равно 0,2, стандартное отклонение - 0,3. Печатаем значение 0,2 в ячейке А1 и 0,3 - в ячейке А2. Значение случайной величины получим в ячейке В1. Воспользуемся для генерирования значения случайной величины "Мастером функций". Для этого открываем окно "Мастер функций", щелкнув мышью на значок А . В левом окне "Мастера функций" курсором выбираем строку "Статистические" и щелкаем мышью. Далее выбираем курсором функцию НОРМОБР и щелкаем мышью кнопку ОК. Появилось окно "НОРМОБР". В первой строке (Вероятность) печатаем СЛЧИС(). Во вторую строку (Среднее) вносим среднее значение нормального распределения, т.е. ячейку А1. В третью строку (Стандартноеоткл) вносим значение стандартного отклонения распределения, т.е. ячейку А2. Выбираем курсором команду ОК и щелкаем мышью. В ячейке В1 появилось одно из значений случайной величины. Чтобы получить следующее значение случайной величины, нажимаем клавишу F9 и т.д. Mo<Значение случайной величины в ячейке В1 можно получить, не прибегая к помощи "Мастера функций". Для этого в ней необходимо напечатать формулу: Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг и нажать клавишу Enter.

**Контрольные вопросы к лекции №8**

1. Моделирование случайной величины. Использование Excel для моделирования случайной величины.
2. Случайные числа и их получение на ПК.
3. Доверительный интервал.
4. Моделирование нормальной случайной величины.
5. Моделирование случайных величин, распределенных по другим законам

**Раздел 4. Статистическое моделирование и обработка экспериментальных данных**

**Тема 9. Обработка экспериментальных данных**

Лекция №9

**Тема лекции: Обработка экспериментальных данных**

**Содержание лекции №9**

1.Обработка экспериментальных данных и подбор эмпирических формул в EXCEL.

2.Отображение финансовых активов с помощью стандартных факторов риска.

**Основная и дополнительная литература к лекции №9**:

а) основная: 2;

б) дополнительная:4 -8;

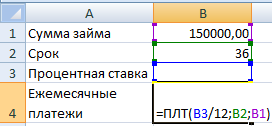
в) интернет-ресурсы: 2-5,10-12,14-16.

**1. Обработка экспериментальных данных и подбор эмпирических формул в EXCEL.**

ГДЕ НАХОДИТСЯ «ПОДБОР ПАРАМЕТРА» В EXCEL?

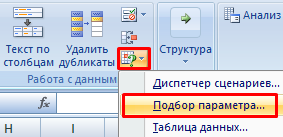
Известен результат некой формулы. Имеются также входные данные. Кроме одного. Неизвестное входное значение мы и будем искать. Рассмотрим функцию «Подбора параметров» в Excel на примере.

**Пример 1. Необходимо подобрать процентную ставку по займу, если известна сумма и срок. Заполняем таблицу входными данными.**

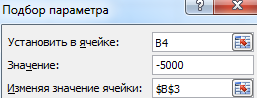


Процентная ставка неизвестна, поэтому ячейка пустая. Для расчета ежемесячных платежей используем функцию ПЛТ.

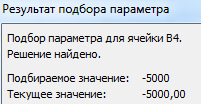
Когда условия задачи записаны, переходим на вкладку «Данные». «Работа с данными» - «Анализ «Что-Если»» - «Подбор параметра».



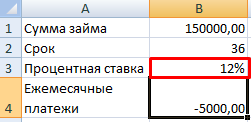
В поле «Установить в ячейке» задаем ссылку на ячейку с расчетной формулой (это ячейка B4). Поле «Значение» предназначено для введения желаемого результата формулы. В нашем примере это сумма ежемесячных платежей. Допустим, -5 000 (чтобы формула работала правильно, ставим знак «минус», ведь эти деньги будут отдаваться). В поле «Изменяя значение ячейки» - абсолютная ссылка на ячейку с искомым параметром ($B$3).



После нажатия ОК на экране появится окно результата.



Чтобы сохранить, нажимаем ОК или ВВОД.



Функция «Подбор параметра» изменяет значение в ячейке В3 до тех пор, пока не получит заданный пользователем результат формулы, записанной в ячейке В4. Команда выдает только одно решение задачи.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ «ПОДБОРА ПАРАМЕТРОВ» В EXCEL

Функция «Подбор параметра» идеально подходит для решения уравнений с одним неизвестным.

**Пример 2. Возьмем для примера выражение: 20 \* х – 20 / х = 25.** Аргумент х – искомый параметр. Пусть функция поможет решить уравнение подбором параметра и отобразит найденное значение в ячейке Е2.

В ячейку Е3 введем формулу: = 20 \* Е2 – 20 / Е2.



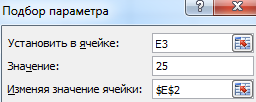
А в ячейку Е2 поставим любое число, которое находится в области определения функции. Пусть это будет 2.

Запускам инструмент и заполняем поля:

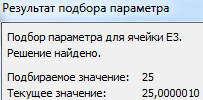
«Установить в ячейке» - Е3 (ячейка с формулой);

«Значение» - 25 (результат уравнения);

«Изменяя значение ячейки» - $Е$2 (ячейка, назначенная для аргумента х).



Результат функции:



Найденный аргумент отобразится в зарезервированной для него ячейке.



Решение уравнения: х = 1,80.

*Примечание. Функция «Подбор параметра» возвращает в качестве результата поиска первое найденное значение. Вне зависимости от того, сколько уравнение имеет решений.*

Если, например, в ячейку Е2 мы поставим начальное число -2, то решение будет иным.



ПРИМЕРЫ ПОДБОРА ПАРАМЕТРА В EXCEL

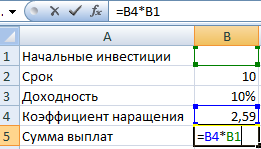
Функция «Подбор параметра» в Excel применяется тогда, когда известен результат формулы, но начальный параметр для получения результата неизвестен. Чтобы не подбирать входные значения, используется встроенная команда.

Пример 3. Метод подбора начальной суммы инвестиций (вклада).

Известные параметры:

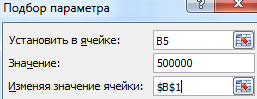
* срок – 10 лет;
* доходность – 10%;
* коэффициент наращения – расчетная величина;
* сумма выплат в конце срока – желаемая цифра (500 000 рублей).

Внесем входные данные в таблицу:

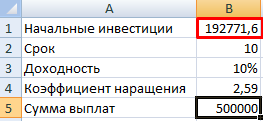


Начальные инвестиции – искомая величина. В ячейке В4 (коэффициент наращения) – формула =(1+B3)^B2.

Вызываем окно команды «Подбор параметра». Заполняем поля:



После выполнения команды Excel выдает результат:

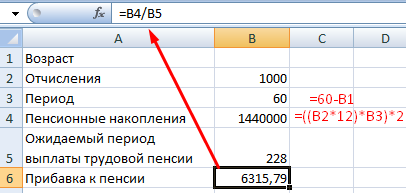


Чтобы через 10 лет получить 500 000 рублей при 10% годовых, требуется внести 192 772 рубля.

Пример 4. Рассчитаем возможную прибавку к пенсии по старости за счет участия в государственной программе софинансирования.

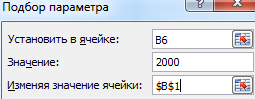
Входные данные:

* ежемесячные отчисления – 1000 руб.;
* период уплаты дополнительных страховых взносов – расчетная величина (пенсионный возраст (в примере – для мужчины) минус возраст участника программы на момент вступления);
* пенсионные накопления – расчетная величина (накопленная за период участником сумма, увеличенная государством в 2 раза);
* ожидаемый период выплаты трудовой пенсии – 228 мес.;
* желаемая прибавка к пенсии – 2000 руб.

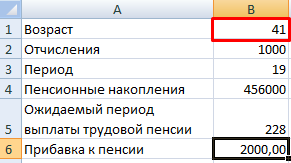


С какого возраста необходимо уплачивать по 1000 рублей в качестве дополнительных страховых взносов, чтобы получить прибавку к пенсии в 2000 рублей:

1. Ячейка с формулой расчета прибавки к пенсии активна – вызываем команду «Подбор параметра». Заполняем поля в открывшемся меню.



1. Нажимаем ОК – получаем результат подбора.



Чтобы получить прибавку в 2000 руб., необходимо ежемесячно переводить на накопительную часть пенсии по 1000 рублей с 41 года.

Функция «Подбор параметра» работает правильно, если:

* значение желаемого результата выражено формулой;
* все формулы написаны полностью и без ошибок.

**2.ОТОБРАЖЕНИЕ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ С ПОМОЩЬЮ СТАНДАРТНЫХ ФАКТОРОВ РИСКА**

В настоящей главе мы рассмотрим отображение основных финансовых активов с помощью стандартных факторов риска в соответствии с методикой принятой в Рискметриках банка J.P. Morgan.

Оценка риска индивидуальных активов не представляет большого труда. Оценка риска слабо диверсифицированного портфеля также не является трудоемкой задачей. Сложности возникают при работе с портфелем, включающим большое количество активов. Для определения риска такого портфеля необходимо располагать данными об их стандартных отклонениях и корреляциях. В результате значительно возрастает количество требуемой информации. Ее сложно хранить и обрабатывать. Также существует вероятность того, что квадратичная форма не будет определена положительно. Поэтому для расчета VaR большого портфеля в Рискметриках банка Дж.П.Морган предлагается следующий прием. Выбирают несколько активов, - назовем их стандартными активами или факторами риска, - через посредство которых выражают изменение цены (доходности) всех остальных финансовых активов. После этого риск портфеля определяют на основе данных стандартных факторов риска. В Риск-метриках банка Дж.П.Морган такие стандартные активы названы «строительными блоками». В качестве стандартных выбирают активы, для которых известны дисперсии и корреляции доходностей с другими стандартными активами. Такой прием позволяет представить множество рисков, ассоциированных с множеством активов портфеля, с помощью нескольких стандартных активов, что существенно упрощает расчеты.

При изложенном подходе риск каждого финансового инструмента проецируют на соответствующий стандартный фактор риска, т.е. копируют с помощью стандартного актива. В ряде случаев финансовый инструмент представим только как комбинация нескольких стандартных факторов риска. В таком случае Рискметрики говорят о представлении его в виде потоков платежей. Следует подчеркнуть, что копирование инструментов портфеля с помощью набора стандартных активов не является абсолютно точным, а содержит определенную долю приближения. Однако это не умаляет значимости получаемых оценок VaR. В отсутствии такого подхода вряд ли было бы возможным относительно быстро определять VaR для больших портфелей.

При расчете VaR портфель представляется в виде набора стандартных активов. Поэтому непосредственно VaR определяется не для исходного портфеля, а для полученного синтетического портфеля, который близко его копирует. В Рискметриках в качестве стандартных активов или факторов риска выступают основные фондовые индексы, валюты, бескупонные облигации с определенными сроками погашения и фьючерсные контракты. Прием декомпозиции актива на стандартные блоки хорошо соответствует инструментам с линейной структурой изменения доходов и слабо подходит для опционных позиций. Рассмотрим проецирование финансовых инструментов на соответствующие им стандартные активы.

**2.1. Акции**

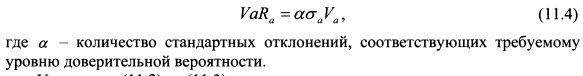
В качестве стандартного актива или фактора риска для акции выступает фондовый индекс. Доходность акции связана с доходностью индекса с помощью коэффициента бета. Данная взаимосвязь представлена уравнением рыночной модели Шарпа:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Как было определено в главе 3, на основе уравнения (11.1) дисперсия и стандартное отклонение акции соответственно равны:



Если стоимость данных акций в портфеле равна Va, то VaR позиции по акции составит:



Уравнения (11.2) и (11.3) позволяют представить риск акции через риск рыночного портфеля. Риск акции содержит рыночныйБуренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаги специфическийБуренин А.Н. Управление портфелем ценных бумагкомпоненты. Однако для широко диверсифицированных портфелей нерыночный риск практически равен нулю. Поэтому риск портфеля определяется только на основе рыночных рисков каждой акции, т.е. слагаемогоБуренин А.Н. Управление портфелем ценных бумагилиБуренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг.

С учетом сказанного получим формулу риска для широко диверсифицированного портфеля. Для простоты проведем рассуждения для портфеля из двух акций. Бета первой акции /?,, второй - j32, их уд. веса в портфеле соответственно составляют 6Х и 02.

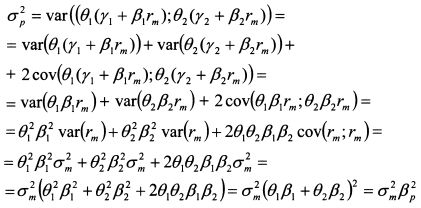
Доходности акций на основе уравнения (11.1) равны:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Поскольку мы рассматриваем ситуацию для широко диверсифицированного портфеля, то специфическими рисками бумаг можно пренебречь и работать с уравнениями вида:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

На основе уравнений (11.5) и (11.6) риск портфеля равен:



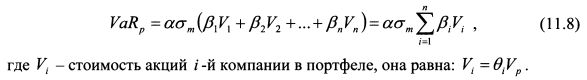
Таким образом, риск портфеля равен риску рыночного портфеля, умноженному на бету портфеля. В свою очередь, как следует из приведенных преобразований, бета портфеля равна средневзвешенному значению коэффициентов бет акций, входящих в портфель. В результате можно записать:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Формулу (11.7) можно также представить как:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

или



Широко диверсифицированный портфель будет состоять из акций компаний разных отраслей. Тогда портфель из стандартных активов может точнее копировать риск исходного портфеля, если для проецирования рисков индивидуальных акций использовать не рыночный индекс, а отраслевые индексы для акций каждой отрасли. В таком случае в качестве стандартных активов выступают отраслевые индексы, для которых известны стандартные отклонения и ковариации с другими стандартными активами.

Пример.

Портфель состоит из акций трех компаний, Д = 0,8; /32 = 0,9; /Зъ = 1,2 . Стоимость акций первой компании в портфеле равна 300 тыс. руб., второй - 200 тыс. руб., третьей - 500 тыс. руб., стандартное отклонение рыночного портфеля для одного дня составляет 2%. Определить однодневный VaR портфеля для доверительной вероятности 95%.

Решение.

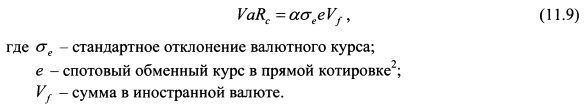
На основании формулы (11.8) VaR портфеля составляет:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Формулы (11.7) и (11.8) позволяют найти VaR широко диверсифицированного портфеля. Поэтому возникает вопрос о том, какой портфель можно считать таковым. Как отмечалось в главе 3, в современных условиях с полным основанием таким портфелем можно считать портфель, включающий не менее 50 акций.

**2.2. Валюта**

Портфель инвестора может включать спотовую позицию в иностранной валюте. В результате возникает риск потерь за счет неблагоприятного изменения валютного курса. Фактором риска в этом случае выступает обменный курс иностранной валюты по отношению к национальной. Если на иностранную валюту не начисляются проценты, то, полагая, что курс распределен нормально, VaR позиции в национальной валюте рассчитывается по формуле:



Пример.

Российский инвестор имеет спотовую позицию в 100 тыс. долл. Обменный курс доллара равен 30 руб. за 1 долл. На основе данных за прошедшие два месяца дневное стандартное отклонение валютного курса составило 0,7%. Определить однодневный VaR с доверительной вероятностью 95%.

Решение.

В соответствии с формулой (11.9) VaR позиции инвестора составляет:

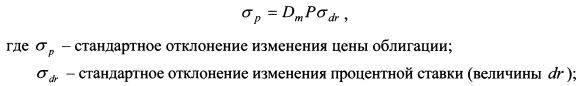
Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

**2.3. Облигации**

Для небольших изменений процентной ставки определить VaR отдельной облигации можно на основе ее модифицированной дюрации. При таком подходе мы делаем допущение о параллельности сдвигов кривых доходностеи. Как известно, зависимость между изменением цены облигации и изменением ее доходности до погашения приблизительно равна:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

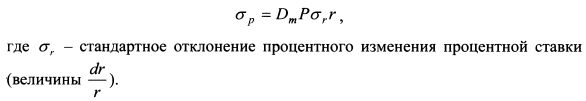
На основе уравнения (11.10) можно записать:



В Рискметриках используется несколько иной подход. Равенство (11.10) можно записать как:

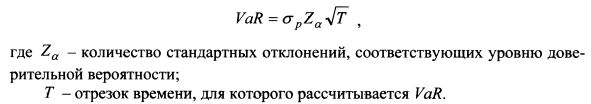
Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Тогда:



Такой поход более согласуется с определением волатильности на рынке, поскольку для финансового актива стандартное отклонение определяют для величины Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг, где S - курс актива.

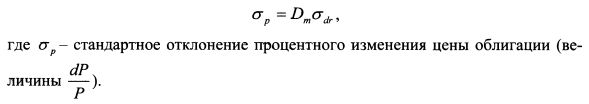
Определив стандартное отклонение цены облигации на основе полученных формул, VaR облигации рассчитаем как:



Формулу (11.10) можно переписать как:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Тогда:



Формулу (11.11) можно представить как:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Тогда:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

В таком случае VaR облигации рассчитаем на основе формулы:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

На развитом финансовом рынке обращается большое количество облигаций. Поэтому, как и в отношении акций, целесообразно свести все их разнообразие к нескольким стандартным облигациям, на которые можно было бы проецировать облигации в портфеле при расчете VaR.

Главным фактором риска по облигации выступает изменение процентной ставки. Конъюнктура процентных ставок описывается кривой доходности или временной структурой процентных ставок. Для аналитических целей используют кривую доходности спот на основе доходности до погашения облигаций с нулевым купоном. Поэтому в качестве стандартных активов для проецирования облигаций используют облигации с нулевым купоном.

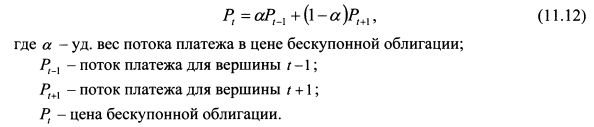
С увеличением сроков до погашения облигаций дисперсия процентной ставки уменьшается и возрастает корреляция между процентными ставками для соседних временных периодов. Поэтому кривую доходности можно с допустимой точностью приближения представить доходностями бескупонных облигаций для нескольких периодов. В качестве таких периодов можно взять один день, одну неделю, один, три и шесть месяцев, один, два, три, четыре, пять, семь, девять, десять, и тридцать лет. В Рискметриках такими моментами времени выступают один, три, шесть месяцев, один, два, три, четыре, пять, семь, девять, десять, пятнадцать, двадцать и тридцать лет. Выбранные сроки погашения для стандартных бескупонных облигаций называют вершинами (vertices). Они представляют собой факторы риска при описании кривой доходности.

|  |
| --- |
| Litobraz.ru  Конкурс сайтов web открытый конкурс litobraz.ru.  litobraz.ru |

Портфель инвестора содержит облигации, которые погашаются не только в стандартные сроки. Поскольку облигации портфеля копируют с помощью данных стандартных бескупонных облигаций, то в этом случае облигации представляют в виде потока платежей (cash flows). Процесс представления позиции в виде потока платежей называется отображением (mapping) . Для бескупонной облигации со сроком погашения отличным от стандартного принцип представления в качестве потока платежей заключается в следующем. Вначале определяют дисконтированную стоимость облигации, т.е. ее цену. После этого цену облигации делят на две части между ближайшими стандартными вершинами. Например, бескупонная облигация погашается через один год и восемь месяцев. Ее цену представят в качестве двух потоков платежей со стандартными сроками один и два года.

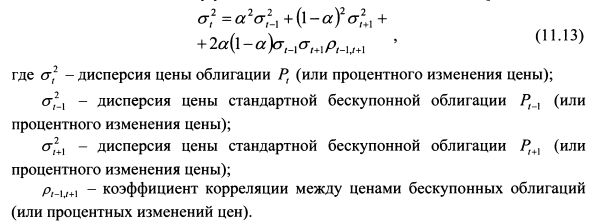
Для купонной облигации данный принцип сводится вначале к представлению ее в качестве портфеля бескупонных облигаций и затем делению дисконтированной стоимости каждой полученной бескупонной облигации на два потока платежа с двумя стандартными соседними вершинами. Например, купонная облигация номиналом 1000 руб. и купоном 10% погашается через год и восемь месяцев. Купон выплачивается один раз в год. Данная облигация вначале представляется как две бескупонные облигации. Первая с номиналом равным первому купонному платежу, т.е. 100 руб. и погашением через восемь месяцев. Вторая - с номиналом 1100 руб. и погашением через год и восемь месяцев. После этого определяют их дисконтированные стоимости. Затем цену первой бескупонной облигации делят на два потока платежа с вершинами шесть месяцев и один год, второй - на два потока платежа с вершинами один и два года.

Для деления цены бескупонной облигации на два потока платежа между соседними стандартными вершинами необходимо найти их удельные веса. Данную задачу решают следующим образом. Цену облигации можно представить как линейную комбинацию потоков платежей:

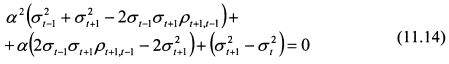


Чтобы представить дисконтированную стоимость облигации Pt в качестве потоков платежей /)\_, и Pt+l, необходимо определить уд. веса а и (\-а).

Спроецированная позиция должна иметь такую же дисперсию как и бескупонная облигация. Поэтому уд. веса потоков платежей находят из равенства:



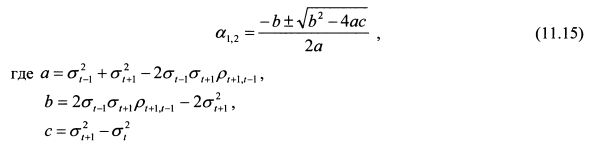
Преобразуем уравнение (11.13) следующим образом:



Уравнение (11.14) является квадратным вида:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Оно имеет два решения:



Поскольку а - это уд. вес потока платежа в цене облигации, то его значение должно лежать в пределах от нуля до единицы. Поэтому в качестве решения уравнения (11.14) из двух значений а следует взять то, которое соответствует указанным границам. Рассмотрим пример определения потока платежей для бескупонной облигации.

Пример 1.

Бескупонная облигация номиналом 1000 руб. погашается через год и восемь месяцев. Доходность годичной и двухгодичной стандартных бескупонных облигаций соответственно равны 8% и 10%. Однодневное стандартное отклонение процентного изменения цены первой облигации равно 0,2%, второй -0,3%. Коэффициент корреляции между однодневными процентными изменениями цен первой и второй облигаций равен 0,8. Представить облигацию в виде потоков платежей.

Решение.

Потоки платежей определяются на основе дисконтированной стоимости облигации. Поэтому найдем цену облигации. Для этого необходимо рассчитать ставку дисконтирования. Ставку дисконтирования определяем на основе интерполирования доходности между доходностями годичной и двухгодичной облигаций:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Дисконтированная стоимость облигации равна:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Стандартное отклонение процентного изменения цены облигации определим линейной интерполяцией между стандартными отклонениями процентных изменений цен годичной и двухгодичной облигаций:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Подставим найденные значения в формулу (11.13):

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

или

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Согласно алгоритму (11.15) решения уравнения составляют:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Из двух ответов подходит второй, поскольку он лежит в диапазоне от нуля до единицы. Это означает, что 22,39% стоимости облигации должно приходится на годичную стандартную бескупонную облигацию, а (100-22,39)= 77,61% на двухлетнюю стандартную облигацию. Таким образом, первый поток платежей со стандартной вершиной в один год равен:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

второй с вершиной два года:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

После того как облигация представлена в виде портфеля потоков платежей для стандартных вершин, VaR определяют обычным способом.

Пример 2.

Определить однодневный VaR с доверительной вероятностью 95% для бескупонной облигации из примера 1.

Решение.

В примере 1 облигация была представлена в качестве двух потоков платежей со стандартными вершинами в один год и два года. Определим VaR для первого потока платежа:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

VaR для второго потока платежа равен:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Не диверсифицированный VaR бескупонной облигации составляет:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Диверсифицированный VaR равен:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Если мы определяем VaR для купонной облигации, то вначале представляем ее как портфель бескупонных облигаций. После этого дисконтированную стоимость каждой бескупонной облигации делим на два потока платежа между соседними стандартными вершинами. Для каждой вершины суммируем потоки платежей, которые на нее приходятся. Определяем VaR относительно суммарной дисконтированной стоимости каждой вершины. После этого находим VaR купонной облигации на основе VaR вершин.

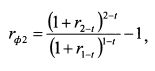
Пример 3.

Номинал облигации 1000 руб., купон 10%, выплачивается один раз в год. До погашения облигации один год восемь месяцев. Данную облигацию представляем как две бескупонные облигации: первая с номиналом 100 руб. и погашением через восемь месяцев; вторая - с номиналом 1100 руб. и погашением через один год восемь месяцев. Дисконтированную стоимость первой облигации делим на два потока платежа с вершинами шесть месяцев и один год. Пусть мы получили соответственно потоки 21 руб. и 74 руб. Дисконтированную стоимость второй облигации делим на два потока платежа с вершинами один год и два года. Пусть они соответственно равны 212 руб. и 736 руб. Получили потоки платежей для трех стандартных вершин: шесть месяцев, один год и два года. Первой вершине соответствует поток платежа в 21 руб. На вторую вершину приходятся два потока платежа: 74 руб. по первой облигации и 212 руб. по второй облигации. Суммируем их и получаем 286 руб. На третью вершину приходится поток платежа в 736 руб. Таким образом, купонная облигация представлена в качестве портфеля из трех стандартных бескупонных облигаций с ценами 21 руб., 286 руб., и 736 руб. Далее, как и в предыдущем примере определяем VaR для каждой стандартной бескупонной облигации. Их сумма дает не диверсифицированный VaR. С учетом корреляций между ценами данных облигаций получаем диверсифицированный VaR.

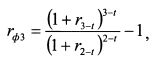
**2.4. Облигации с плавающим купоном**

Отличие облигации с плавающим купоном от облигации с твердым купоном состоит в том, что для нового купонного периода устанавливается новая процентная ставка, соответствующая текущей конъюнктуре. Поэтому необходимо спрогнозировать величину будущих купонов. Однако в Рискметриках данная проблема решается более простым способом. В каждый данный момент времени наилучший прогноз рынка - это форвардная ставка для соответствующего периода времени в будущем. Кроме того, для дисконтирования купонов облигации вместо показателя доходности до погашения, который является одинаковым для всех периодов дисконтирования, можно использовать спотовую процентную ставку для соответствующего временного периода. Поэтому будем дисконтировать будущие платежи по такой облигации под соответствующие спотовые процентные ставки.

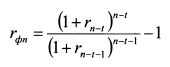
Пусть ставка спот для периода времени (l - /), когда выплачивается первый купон, равна гх\_п второй купон - r2\_t, ..., последний купон - rn\_t, где t - текущий момент времени. Форвардная ставка для периода времени до выплаты первого купона равна спотовой ставке, для периода времени в будущем для второго купона (гф2):



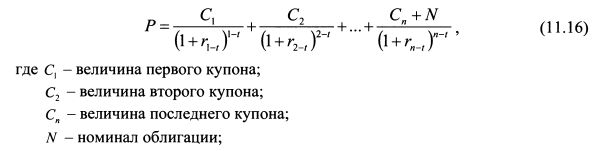
для третьего купона гфЪ:



последнего купона гфп:



Цена облигации равна:



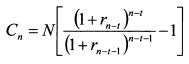
В момент начала первого купонного периода спотовая ставка равна гх. Поэтому величина первого купона составляет: Сх = Nrx. Величина второго купона на основе форвардной ставки составляет:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

третьего купона:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

п-го купона:



Подставив значения купонов в формулу (11.16), после преобразования получим:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Таким образом, цена бескупонной облигации находится дисконтированием очередного купона и номинала под спотовую процентную ставку. Поэтому облигацию с плавающим купоном можно представить как бескупонную облигацию, номинал которой равен сумме очередного купона и номинала и погашаемую в день выплаты очередного купона. Если текущий момент времени совпадает с днем выплаты купона, то цена облигации будет равна номиналу:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

**2.5. Процентный своп**

Процентный своп можно представить как портфель из двух облигаций - твердокупонной и с плавающим купоном с номиналами равными условному номиналу свопа. По одной из них инвестор занимает длинную, а по другой короткую позиции. После этого облигацию с твердым купоном представляют в виде потока платежей серии бескупонных облигаций, как было показано в параграфе 11.3.

Облигацию с плавающим купоном представляют в виде одной бескупонной облигации, как в параграфе 11.4.

**2.6. Соглашение о форвардной ставке (FRA)**

Соглашение о форвардной ставке позволяет инвестору обеспечить себе в будущем процентную ставку по депозиту равную форвардной ставке, которая определяется текущими ставками спот. Допустим, инвестор купил трехмесячное FRA через шесть месяцев. Форвардная трехмесячная ставка через шесть месяцев (гф) определяется из соотношения:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

Инвестор может обеспечить себе размещение денег под форвардную ставку и помимо FRA, взяв сейчас кредит на шесть месяцев под спотовую ставку г6 и разместив данную сумму на депозите на девять месяцев под спотовую ставку г9. Поэтому позиция по FRA эквивалентна покупке девятимесячной бескупонной облигации и продаже шестимесячной бескупонной облигации. Номиналы облигаций равны номиналу FRA. Таким образом, FRA можно представить как портфель из двух бескупонных облигаций, по одной из которых инвестор занимает длинную, а по другой - короткую позиции.

**2.7. Форвардный валютный контракт**

Форвардный контракт можно рассматривать как портфель, состоящий из двух облигаций с нулевым купоном. Номинал одной из них представлен в иностранной валюте, другой - в национальной. Номиналы облигаций соответственно равны суммам, которые обмениваются в рамках контракта. Рассмотрим позицию по форвардному контракту, когда инвестор покупает иностранную валюту и продает национальную.

Ее можно рассматривать как покупку инвестором облигации в иностранной валюте и выпуск облигации в национальной валюте. На дату истечения контракта покупатель получает сумму номинала первой облигации в иностранной валюте и уплачивает национальную валюту, погашая вторую облигацию. Позицию по облигации в национальной валюте можно представить таким же образом, как было показано в параграфе 11.3. По облигации в иностранной валюте необходимо учесть валютный риск и риск изменения иностранной процентной ставки. Пусть по облигации на момент истечения контракта инвестор получит сумму Nf, обменный курс равен е, ставка процента по иностранной валюте - rf. Тогда приведенная стоимость облигации Pf в национальной валюте составит:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

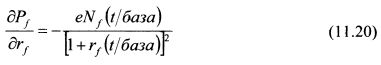
Как видно из формулы (11.17), факторами риска для облигации выступают обменный курс и иностранная процентная ставка. Поэтому для определения стандартного отклонения цены облигации разложим изменение цены облигации в ряд Тейлора по данным факторам риска в точке, соответствующей текущей цене облигации:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

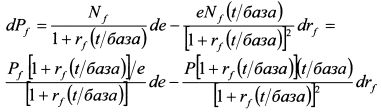
На основании формулы (11.17) получаем:

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

и



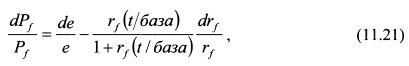
Подставим выражения (11.19) и (11.20) в (11.18):



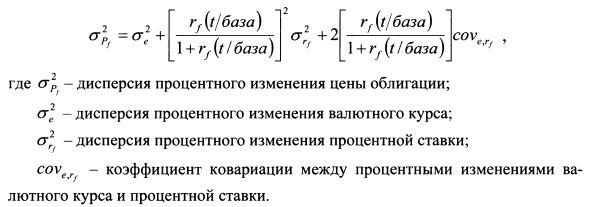
или

Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг

или



На основе формулы (11.21) дисперсия процентного изменения цены облигации равна:



Рассчитав стандартное отклонение процентного изменения цены облигации, мы можем определить удельные веса для представления ее в качестве потоков платежей, как было показано в параграфе 11.3.

**Краткие выводы**

В Рискметриках банка Дж.П.Морган риск портфеля определяют на основе стандартных факторов риска. В качестве стандартных выбирают активы, для которых известны дисперсии и корреляции доходностей с другими стандартными активами. Это позволяет представить множество рисков, ассоциированных с множеством активов портфеля, с помощью нескольких стандартных активов.

Если финансовый инструмент представим только как комбинация нескольких стандартных факторов риска, то его отображают в виде потоков платежей.

Прием декомпозиции актива на стандартные блоки соответствует инструментам с линейной структурой изменения доходов.

В качестве стандартного актива для акции выступает фондовый индекс, для проецирования облигаций используют облигации с нулевым купоном.

Сроки погашения для стандартных бескупонных облигаций называют вершинами.

Если облигации погашаются не в стандартные сроки, то их представляют в виде потока платежей. Процесс представления позиции в виде потока платежей называется отображением.

Облигацию с плавающим купоном можно представить как бескупонную с номиналом равным сумме очередного купона и номинала и погашаемую в день выплаты очередного купона.

Процентный своп можно рассматривать как портфель из двух облигаций - твердокупонной и с плавающим купоном с номиналами равными условному номиналу свопа. По одной из них инвестор занимает длинную, по другой - короткую позиции.

FRA можно представить как портфель из двух бескупонных облигаций, по одной из которых инвестор занимает длинную, а по другой - короткую позиции.

Форвардный контракт можно рассматривать как портфель, состоящий из двух облигаций с нулевым купоном. Номинал одной из них представлен в иностранной валюте, другой - в национальной.

**Контрольные вопросы к лекции №9**

1.Обработка экспериментальных данных и подбор эмпирических формул с использованием Excel.

2.Отображение финансовых активов с помощью стандартных факторов риска.

# Перечень учебной литературы по дисциплине

**а) основная:**

1. Бахвалов Н.С. Численные методы [Электронный ресурс]: учебник/ Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.— Электрон. текстовые данные.— М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.— 635 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/6502.— ЭБС «IPRbooks», по паролю (гриф МО)
2. Ильченко А.Н. Практикум по экономико-математическим методам [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Ильченко А.Н., Ксенофонтова О.Л., Канакина Г.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: Финансы и статистика, 2014.— 288 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/18831.— ЭБС «IPRbooks», по паролю (гриф УМО)
3. Пантина И.В. Вычислительная математика [Электронный ресурс]: учебник/ Пантина И.В., Синчуков А.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2012.— 176 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17012.— ЭБС «IPRbooks», по паролю (гриф УМО)

**б) дополнительная:**

1. Алексеев Г.В. Численное экономико-математическое моделирование и оптимизация [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Алексеев Г.В., Холявин И.И.— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Вузовское образование, 2013.— 195 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16905.— ЭБС «IPRbooks», по паролю
2. Баллод Б.А. Методы и алгоритмы принятия решений в экономике [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Баллод Б.А., Елизарова Н.Н.— Электрон. текстовые данные.— М.: Финансы и статистика, 2014.— 224 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/18819.— ЭБС «IPRbooks», по паролю (гриф УМО)
3. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.— 240 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12282.— ЭБС «IPRbooks», по паролю (гриф МО)
4. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: учебник для вузов/ Вержбицкий В.М.; 3-е изд., стер.- М.: Высшая школа, 2009.-840 с. ISBN 978-5-06-006123-9; 2009 г. (Гриф МО и науки) (в сети Интернет в свободном доступе [Электронный ресурс]: учебник. — Электрон. дан. — Режим доступа: https://vk.com/doc7158357\_59376905?...; http://www.library.ugatu.ac.ru/pdf/teach/verzhbitskii\_osnovy\_chislen\_2009.pdf
5. Лапчик М.П., Рагулина М.И., Хеннер Е.К. Численные методы: уч. пособие/ Лапчик М.П. – М.: Издательский центр: «Академия», 2010. (гриф УМО)

**г)Интернет-ресурсы:**

1. Методы обработки экспериментальных данных/ Рубан А.И. [Электронный ресурс]: офиц.сайт.— Электрон. дан. — Режим доступа: http:// ikit.edu.sfu-kras.ru/files/ 17/lab/lab.pdf
2. Научная электронная библиотека eLIBRARY.ru [Электронный ресурс]: раздел Информационные технологии. — Электрон. дан. — Режим доступа: http://www.elibrary.ru/ defaultx.asp
3. Научная электронная библиотека IPRbooks.ru [Электронный ресурс]: раздел Информационные технологии. — Электрон. дан. — Режим доступа: http://www. iprbooks.ru (по паролю)
4. Научная электронная онлайн-библиотека Порталус [Электронный ресурс]: раздел Информационные технологии. — Электрон. дан. — Режим доступа: http://www. portalus.ru
5. [Статистические методы и модели](http://www.google.ru/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CBwQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.aup.ru%2Fbooks%2Fm1091%2F&ei=vLdQVP7dKof5ygOFqoCgCQ&usg=AFQjCNEykkIqON2llXxEK1AY_FJHp8Y0pg&bvm=bv.78597519,d.bGQ&cad=rjt): Статистическое моделирование систем; Статистические методы анализа и обработки экспериментальных данных [Электронный ресурс]: бизнес-портал AUP.Ru. — Электрон. дан. — Режим доступа: http:// www. aup.ru
6. Численные методы ... Методы Гаусса, прогонки, ... Численные методы решения обыкновенных ДУ… [Электронный ресурс]: офиц.сайт,— Электрон. дан. — Режим доступа: http://www.tiiel.ru/files/u1458/Chislennie\_metodi.doc
7. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных ... [Электронный ресурс]: офиц.сайт,— Электрон. дан. — Режим доступа: http://www.tiiel.ru/files/u1458/ Chislennie\_metodi.doc
8. Численные методы: решение нелинейных уравнений [Электронный ресурс]: офиц.сайт,— Электрон. дан. — Режим доступа: http://www.statistica.ru/branches.../ chislennye-metody-resheniya-ravneniy/
9. Численные методы: решение систем линейных уравнений... [Электронный ресурс]: офиц.сайт,— Электрон. дан. — Режим доступа:http://www.ict.edu.ru/
10. Численные методы решения экономических задач/ Учебное пособие [Электронный ресурс]: офиц.сайт,— Электрон. дан. — Режим доступа: https://www.elibrary.asu.ru /xmlui/handle/asu/124 -
11. Численные методы решения экономических задач/ Учебное пособие [Электронный ресурс]: офиц.сайт,— Электрон. дан. — Режим доступа: http://www.elibrary.asu.ru/ xmlui/bitstream/handle/asu/124/ bookt104. pdf?...3
12. Численные методы для экономистов/ [Котенко А. А.](http://samlib.ru/a/alowa_eleonora_aleksandrowna/chislennyemetody.shtml) , учебное пособие [Электронный ресурс]: офиц.сайт,— Электрон. дан. — Режим доступа: http://www.samlib.ru/ a/alowa\_eleonora\_aleksandrowna/chislennyemetody.shtml – Учебное пособие.
13. Численные методы. Курс лекций/ И.Е. Денежкина. Курс лекций [Электронный ресурс]: офиц.сайт. — Электрон. дан. — Режим доступа: http://www.portal.ufrf.ru/ CoreCatalogDocumentView/View?Id=e6a1b047-401f...
14. Электронная библиотека книг [Электронный ресурс]: раздел Информационные технологии и системы. — Электрон. дан. — Режим доступа: http://www.kodges.ru
15. Электронная библиотека книг [Электронный ресурс]: раздел Информационные технологии. — Электрон. дан. — Режим доступа: http://www.kodges.ru
16. Электронный информационный ресурс для преподавателей компании КонсультантПлюс [Электронный ресурс]: раздел Информационные технологии. — Электрон. дан. — Режим доступа: http://www.edu.consultant.ru

Автор: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В.К.Астахов